RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE

I TEHNIČKE NAUKE

24203

RAD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
KNJIGA 277.

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE NAUKE

KNJIGA III.

UREDNIK:

AKADEMIK JOSIP LONČAR

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB

1950

ŠTAMPARSKI ZAVOD »OGNJEN PRICA«, ZAGREB

Dr. Ing. DANILO BLANUŠA

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

(Dalja izlaganja na temelju radnje iz 271. knjige „Rada")

Istražujemo u ovom posljednjem dijelu integralne teoreme, o kojima je bila riječ na kraju I. dijela.[1]

1. Jedna temeljna Laplaceova transformacija

U Laplaceovoj transformaciji

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt \tag{1}$$

zvat ćemo $F(t)$ prvotnom funkcijom, a $f(s)$ izvedenom funkcijom.

Doetsch daje u svojoj knjizi o Laplaceovoj transformaciji[2] na stranama 401 do 403 tablicu prvotnih funkcija s pripadnim izvedenim funkcijama. Pod brojem 38 te tablice dane su funkcije

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq \alpha \\ J_0(k\sqrt{t^2 - \alpha^2}) & \text{za } t > \alpha \end{cases} \tag{2}$$

$$f(s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s^2+k^2}}}{\sqrt{s^2+k^2}} \tag{3}$$

s naznakom $\alpha \geqq 0$, k po volji, apscisa konvergencije $\beta = 0$. To dakle znači, da je Laplaceov integral (1) s funkcijom (2)

[1] Formule označene rimskim brojkama I do III odnose se na prijašnje autorove radnje o Besselovim funkcijama; v. »Rad« i Math. Rev., 8 (1947), str. 580—581.

[2] G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer, Berlin 1937. Ovu ćemo knjigu odsada kratko citirati sa »Doetsch«.

konvergentan za Re $(s) > 0$, a divergentan za Re $(s) < 0$. Ovo je međutim ispravno samo onda, ako je k realan broj, što u Doetschovoj tablici nije naznačeno, a nije naznačeno ni na str. 373 spomenute knjige, gdje je ta transformacija napisana ovako:

$$\int_a^\infty e^{-\sigma\tau} J_0(k\sqrt{\tau^2-a^2})\, d\tau = \frac{e^{-a\sqrt{\sigma^2+k^2}}}{\sqrt{\sigma^2+k^2}} \quad (a \geqq 0, \sigma > 0, k \text{ po volji}). \quad (4)$$

Ova je formula toliko specijalnija, što se traži $\sigma > 0$, dakle σ realno, dok naznaka za apscisu konvergencije $\beta = 0$ u tablici dopušta kompleksno s (koje odgovara varijabli σ), za koje je Re $(s) > 0$. Uvjet, da k treba da bude realno, ne da se ni iz čega naslutiti, jer se u toj tablici za konstante u raznim funkcijama dopuštaju kompleksne vrijednosti, što je vidljivo iz funkcije pod brojevima 4 do 9, gdje su apscise konvergencije ovisne o realnim odnosno imaginarnim dijelovima dotičnih konstanta. S obzirom na to, da je relacija (4) temelj naših daljih razmatranja, provest ćemo točnu diskusiju konvergencije toga Laplaceova integrala za slučaj kompleksnog k, premda nam ne će svi ti rezultati biti potrebni.

Prije nego što prijeđemo na tu diskusiju, dat ćemo neke kritičke primjedbe o onim mjestima u literaturi, koja rade o tom integralu. Kao izvor za formulu (4) Doetsch navodi Watsonovo djelo[3], str. 416, formula (4), u kojoj da treba supstituirati $t^2 - y^2 = \tau^2$, $a = \sigma$, $b = k$, $y^2 = -a^2$. To, istina, nije sasvim korektno, jer ta formula glasi

$$\int_0^\infty J_0(bt) \frac{\exp[-a\sqrt{t^2-y^2}]}{\sqrt{t^2-y^2}}\, tdt = \frac{\exp[\mp iy\sqrt{a^2+b^2}]}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (4a)$$

s napomenom, da vrijedi gornji ili donji predznak prema tome, da li put integracije odozgo ili odozdo obilazi singularitet integranda na mjestu $t = y$. Veličina y je izrijekom pretpostavljena kao realna i pozitivna, dok bi u Doetschovoj formuli prema $y^2 = -a^2$ zbog realnog a ta veličina ispala čisto imaginarna. Može se međutim analognim postupkom, kako Watson dobiva našu formulu (4a), dobiti relacija

$$\int_0^\infty J_0(bt) \frac{\exp[-a\sqrt{t^2+a^2}]}{\sqrt{t^2+a^2}}\, tdt = \frac{\exp[-a\sqrt{a^2+b^2}]}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (4b)$$

[3] G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1922. Ovo ćemo djelo kratko citirati sa »Watson«.

u kojoj je a realno i pozitivno, pa bi iz nje ispravno izlazila naša formula (4), koju donosi Doetsch. U Watsonovu tekstu se pretpostavlja, da su konstante a i b (koje odgovaraju Doetschovim konstantama σ i k) realne i pozitivne, a tek se u bilješci kaže, da bi uz izvjesna ograničenja mogle biti i kompleksne (»with certain limitations, a and b may be complex«). Ova će ograničenja biti predmet naše diskusije.

Možemo još navesti Weyrichovu knjigu[4], gdje je na str. 110 dana formula (18), koja glasi:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, \quad (4c)$$

gdje je $R = \sqrt{r^2+z^2}$. Naznačeno je, da $\sqrt{\lambda^2-k^2}$ mora imati takav predznak, da bude $\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2-k^2} = +1$. Nema diskusije o dopustivim vrijednostima veličine k. Očito je, da se integral ne mijenja, ako k nadomjestimo sa $-k$, dok se lijeva strana relacije mijenja. Može se pokazati, da imaginarni dio veličine k mora biti veći od nule. Ako je k čisto imaginarno i taj imaginarni dio pozitivan, stavimo $k = ia$, čime je $a > 0$, dalje stavimo $|z| = \sigma$, $r = c$, $\lambda = +\sqrt{\tau^2-a^2}$, $R = \sqrt{r^2+z^2} = \sqrt{c^2+z^2}$, pa dobijemo (4), gdje samo piše c mjesto k. Ako k nije čisto imaginarno, dobijemo istu formulu (4), ali s kompleksnim a, a krivulja integracije polazi od a i teži prema $+\infty$. Formula (4) je i za taj slučaj ispravna, što se neposredno uviđa analitičkim produživanjem.

Formula (4c) dana je i u II. dijelu djela Franka i Misesa[5] na str. 924., formula (11). Ni ovdje nisu diskutirane dopustive vrijednosti veličine k, samo je na str. 923 kod formule (9a) primjedba, da integrand integrala $\int_0^\infty e^{i(k+\lambda\cos\beta)\varrho}\, d\varrho$ iščezava za $\varrho = \infty$, što se postizava prikladnim predznakom veličine k, odnosno za realno k time, da se λ odabere kompleksno. Očito je, da se to slaže s našom primjedbom, da imaginarni dio veličine k mora biti pozitivan. Kompleksno λ za formulu (4c) nema

[4] R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937.

[5] Ph. Frank und P. v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1935.

smisla, jer je to realna varijabla integracije. Dalje se nalaze u I. dijelu istog djela (1930) na str. 825. formule (32), (31), koje glase:

$$Kv \int_0^\infty e^{-p\alpha-\varrho\left(\alpha+\frac{x}{v}\right)} J_0\left(i\varrho\sqrt{\alpha^2+2\alpha\frac{x}{v}}\right) d\alpha = \frac{1}{pH(x,p)} \quad (4d)$$

sa

$$\frac{1}{H(x,p)} = Kv \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\varrho}{p}}} \exp\left[-\frac{xp}{v}\left(\sqrt{1+\frac{2\varrho}{p}}-1\right)\right]. \quad (4c)$$

Na citiranom mjestu je u eksponentu eksponencijalne funkcije pod integralom pomutnjom ispušten sumand $-p\alpha$. Stavimo li u (4d), (4e) $\varrho = -ik$, $p = \sigma + ik$, $\frac{x}{v} = \beta$, $\alpha = \tau - \beta$, dobijemo opet formulu (4), u kojoj samo piše β mjesto α. U sva tri citirana djela navodi se kao izvor jedna Sommerfeldova rasprava[6]. U toj se raspravi upotrebljava i dokazuje relacija (4c), a k je tako definirano, da je k, pa čak i k^2, kompleksan broj u prvom kvadrantu (vidi str. 678. te rasprave). Time je tamo zadovoljen spomenuti uvjet, da imaginarni dio veličine k mora biti pozitivan. Relacija je međutim točna i onda, ako je k u drugom kvadrantu, što se uviđa analitičkim produživanjem, kod kojega $\sqrt{\lambda^2-k^2}$ ne smije proći kroz nulu, dakle k^2 ne smije dobiti pozitivnu realnu vrijednost, t. j. k ne smije prijeći u treći ili četvrti kvadrant.

Prelazimo sada na diskusiju konvergencije integrala (4). Napišimo taj integral našim kasnijim oznakama:

$$L = \int_x^\infty e^{-st} J_0\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right) dt \qquad (x \geqq 0) \quad (5)$$

i stavimo općenito

$$s = s_1 + is_2 \quad (6)$$

$$c = c_1 + ic_2. \quad (7)$$

Budući da je prema III (1)

$$J_0(z) = J_0(-z), \quad (8)$$

možemo promjenom predznaka od c uvijek postići, da bude

[6] A. Sommerfeld: Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Physik und Chemie, 28 (1909), str. 665 i t. d., osobito str. 683.

$$c_2 > 0 \quad (9)$$

ili

$$c_1 > 0, \quad c_2 = 0. \quad (10)$$

Konvergencija integrala (5) na donjoj granici nije sumnjiva, jer je tamo prema III (1) integrand kontinuiran. Radi se dakle o konvergenciji s obzirom na gornju granicu. Poslužit ćemo se asimptotskim razvojem[7]

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}}+O(|z|^{-2M})\right]-\right.$$

$$\left.-\sin\left(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}+O(|z|^{-2M-1})\right]\right\}, \quad (11)$$

gdje je upotrebljen Hankelov simbol

$$(\nu,m) = \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}\,m!}, \quad (\nu,0)=1, \quad (12)$$

a pretpostavlja se

$$-\pi < \arg z < \pi. \quad (13)$$

Ovaj posljednji uvjet bit će za nas zadovoljen s obzirom na (10) i s obzirom na to, da je $\sqrt{t^2-x^2} \geqq 0$.

Stavimo li u (11)

$$\nu = 0, \quad M = 1, \quad (14)$$

dobijemo

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(|z|^{-2})]-\right.$$

$$\left.-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\left[-\frac{1}{8z}+O(|z|^{-3})\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{1}{2}\left[\exp\left(iz-\frac{i\pi}{4}\right)+\exp\left(-iz+\frac{i\pi}{4}\right)\right][1+O(|z|^{-2})]- \quad (15)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left[\exp\left(iz-\frac{i\pi}{4}\right)-\exp\left(-iz+\frac{i\pi}{4}\right)\right]\left[-\frac{1}{8z}+O(|z|^{-3})\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\left\{\exp\left(iz-\frac{i\pi}{4}\right)[1+O(|z|^{-1})]+\exp\left(-iz+\frac{i\pi}{4}\right)[1+O(|z|^{-1})]\right\}.$$

[7] L. c. [4], str. 47.

Uvrstimo li sad

$$z = c\sqrt{t^2-x^2} = (c_1 + ic_2)\, t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} \tag{16}$$

i uočimo, da zbog

$$\lim_{t\to\infty} \frac{c\sqrt{t^2-x^2}}{t} = c \tag{17}$$

iz egzistencije konačnog $\limsup_{t\to\infty} [|c\sqrt{t^2-x^2}|\, f(t)]$ očito izlazi i egzistencija konačnog $\limsup_{t\to\infty} [t\, f(t)]$, to jest da mjesto $O(|c\sqrt{t^2-x^2}|^{-1})$ možemo pisati $O(t^{-1})$, dobijemo

$$J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) =$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{1}{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{\exp\left(ic_1 t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left(-c_2 t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\right)\left[1+O(t^{-1})\right]\right\} +$$

$$+ \frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{1}{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{\exp\left(-ic_1 t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp\left(c_2 t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\right)\left[1+O(t^{-1})\right]\right\}, \tag{18}$$

tako da za integrand od (5) vrijedi asimptotski razvoj

$$e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) =$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{\exp[i(c_1-s_2)t] \exp\left[ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp[-(c_2+s_1)t] \exp\left[-c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right][1+O(t^{-1})]\right\} +$$

$$+ \frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{\exp[-i(c_1+s_2)t] \exp\left[-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \exp[(c_2-s_1)t] \exp\left[c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right][1+O(t^{-1})]\right\}. \tag{19}$$

Zbog

$$\lim_{t\to\infty}\left[t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] = 0 \tag{20}$$

vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left[ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] = \lim_{t\to\infty} \exp\left[-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \exp\left[-c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] = \lim_{t\to\infty} \exp\left[c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] = 1. \tag{21}$$

Dalje je očito

$$|\exp[i(c_1-s_2)t] = \exp[-i(c_1+s_2)t]| = 1 \tag{22}$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{23}$$

Pretpostavimo li sad

$$s_1 > c_2, \tag{24}$$

to se vidi s obzirom na (9), da eksponenti eksponencijalnih funkcija $\exp[-(c_2+s_1)t]$ i $\exp[(c_2-s_1)t]$ postaju negativni i da integral mora biti apsolutno konvergentan. Pretpostavimo li dalje

$$s_1 = c_2 > 0 \tag{25}$$

$$s_2 = -c_1, \tag{26}$$

to se vidi, da funkcija $\exp[-(c_2+s_1)t]$ i sada ima negativan eksponenat i da će stoga prvi sumand izraza na desnoj strani od (19) dati apsolutno konvergentan integral. Drugi sumand toga izraza će glasiti

$$S_2 = \frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp\left[-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\cdot \right.$$

$$\left. \cdot \exp\left[c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right][1+O(t^{-1})]\right\}. \tag{27}$$

S obzirom na (21) i (23) dat će član $O(t^{-1})$ u uglastoj zagradi apsolutno konvergentan integral.

Prema (21) možemo staviti

$$\exp\left[-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\exp\left[c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right] =$$

$$= 1+\delta_1+i\delta_2, \tag{28}$$

gdje je

$$\lim_{t\to\infty} \delta_1 = 0 \tag{29}$$

$$\lim_{t\to\infty} \delta_2 = 0, \tag{30}$$

t. j. za po volji maleno ε može se naći T tako, da za

$$t > T \tag{31}$$

vrijedi

$$|\delta_1| < \varepsilon \tag{32}$$

i prema tome

$$1+\delta_1 > 1-\varepsilon. \tag{33}$$

Budući da je osim toga

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} > \frac{1}{\sqrt{t}}, \tag{34}$$

to je

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \exp\left[-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\exp\left[c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}(1+\delta_1) > \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{t}} \quad \text{za} \quad t > T, \tag{35}$$

i prema tome taj dio daje divergentan integral. Integral (5) je dakle pod pretpostavkom (25), (26) divergentan, tako da je po poznatim stavcima[8] apscisa konvergencije, a ujedno i apscisa apsolutne konvergencije

$$\beta = c_2. \tag{36}$$

U točki $s_1 = c_2 > 0$, $s_2 = -c_1$ pravca konvergencije $s_1 = c_2 > 0$ divergira dakle integral (5). Preostaje još da se istraži, da li je taj integral konvergentan u ostalim točkama pravca konvergencije. (Svakako on u tim točkama ne može biti apsolutno konvergentan, jer pravac apsolutne konvergencije pripada ili sav ili ne pripada nikako području apsolutne konvergencije[9]). Konačno još treba posebno diskutirati slučaj $c_2 = 0$. Pretpostavimo dakle najprije

$$s_2 = c_2 > 0 \tag{37}$$

$$s_2 \neq -c_1. \tag{38}$$

Prvi sumand izraza na desnoj strani od (19) dat će zbog (36) apsolutno konvergentan integral, isto tako dio drugog sumanda, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$. Preostaje još izraz

$$R = \frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt[4]{1-\frac{x^2}{t^2}}} \exp\left[-i(c_1+s_2)t\right]\cdot$$

$$\cdot \exp\left[(c_2-ic_1)t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]. \tag{39}$$

Red potencija

$$y = t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right) = -t\left(\frac{x^2}{2t^2}+\frac{x^4}{8t^4}+\frac{x^6}{16t^6}+\frac{3x^8}{128t^8}+\ldots\right) =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right) \tag{40}$$

možemo uvrstiti u razvoj

$$\exp\left[(c_2-ic_1)y\right] = 1+\frac{(c_2-ic_1)y}{1!}+\frac{(c_2-ic_1)^2 y^2}{2!}+\ldots, \tag{41}$$

što je dopušteno, jer je za dovoljno veliko t red (40) apsolutno konvergentan i suma apsolutnih vrijednosti njegovih članova

[8] Doetsch, 3. poglavlje § 2. str. 13 i t. d.
[9] Doetsch, str. 15.

manja od radija konvergencije reda (41).[10] (Taj radij konvergencije je neizmjerno velik.) Dobijemo dakle

$$\exp\left[(c_2-ic_1)\,t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)\right]=1-(c_2-ic_1)\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}(c_2-ic_1)^2\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)^2-\frac{1}{3!}(c_2-ic_1)^3\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)^3+\ldots=$$

$$=1-(c_2-ic_1)\frac{x^2}{2t}+(c_2-ic_1)^2\frac{x^4}{8t^2}-(c_2-ic_1)\left[1+\frac{1}{6}(c_2-ic_1)^2x^2\right]\frac{x^4}{8t^3}+\ldots \tag{42}$$

Dalje vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-\frac{x^2}{t^2}}}=1+\frac{x^2}{4t^2}+\frac{5x^4}{32t^4}+\frac{15x^6}{128t^6}+\ldots \tag{43}$$

Produkt apsolutno konvergentnih redova (42) i (43) daje

$$R=\frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\left[-i(c_1+s_2)\,t\right]\left\{1-(c_2-ic_1)\frac{x^2}{2t}+\right.$$

$$\left.\left[(c_2-ic_1)^2\frac{x^2}{2}+1\;\frac{x^2}{4t^2}-\ldots\right\}=\right.$$

$$=\frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}}\,\frac{\exp\left[-i(c_1+s_2)\,t\right]}{\sqrt{t}}\left[1+O(t^{-1})\right]. \tag{44}$$

Dio toga izraza, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$, daje očito apsolutno konvergentan integral, a ostali dio za $c_1+s_2\neq 0$ [vidi (38)] uvjetno konvergentan integral, što je lako dokazati.[11]

[10] Isporedi na pr. K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1922, str. 173.

[11] Taj integral je dobro poznat. Zna se, da je

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i).$$

Usporedi C. Jordan: Cours d'analyse de l'école polytechnique, Gauthier-Villars, Paris 1913, II. sv., str. 201.

Prema tome je pod uvjetima (37), (38) integral (5) uvjetno konvergentan. Pretpostavimo konačno

$$s_1=c_2=0 \tag{45}$$

$$c_1>0\,. \tag{46}$$

Za

$$s_2=-c_1 \tag{47}$$

daje drugi član od (19) divergentan integral, što smo već prije dokazali (nezavisno od toga, da li vrijedi (37) ili (45)). Prvi član će dati uvjetno konvergentan integral, (a ne apsolutno konvergentan, kao pod pretpostavkom (37)), što izlazi na analogan način, kao što je bio upotrebljen, da se izvede (44). Integral (5) je dakle pod pretpostavkom (45), (46), (47) divergentan.

Za

$$s_2=c_1 \tag{48}$$

uz (45), (46) dat će prvi član od (19) divergentan integral, a drugi član uvjetno konvergentan, dakle je integral (5) divergentan. Ako ne vrijedi ni (47) ni (48), dat će oba člana od (19) uvjetno konvergentne integrale, tako da je integral (5) konvergentan. Vidi se dakle, da je za $c_2=0$ na pravcu konvergencije $s_1=0$ integral (5) divergentan u dvije točke, $s_2=-c_1$ i $s_2=c_1$.

Slučaj

$$c_1=c_2=0 \tag{49}$$

je trivijalan, jer je onda Besselova funkcija u integralu (5) identično jednaka jedan.

Oslobodimo li se pretpostavke (9) odnosno (10), možemo dobivene rezultate izraziti ovako:

STAVAK IV 1. S t a v i m o l i

$$c=c_1+ic_2\,, \tag{50}$$

a p s c i s a j e k o n v e r g e n c i j e i n t e g r a l a

$$L=\int_0^\infty e^{-st}J_0\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right)dt \tag{51}$$

d a n a s a

$$\beta=|c_2|\,. \tag{52}$$

Ako je

$$c_2 \neq 0, \tag{53}$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točci $(|c_2|, -c_1 \operatorname{sgn} c_2)$, gdje je divergentan. Ako je

$$c_2 = 0, \quad c_1 \neq 0, \tag{54}$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točkama $(0, c_1)$, $(0, -c_1)$, gdje je divergentan. Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{55}$$

je trivijalan, i integral je u tom slučaju na cijelom pravcu konvergencije divergentan.

Potpunosti radi primjećujemo, da je analogno kod Laplaceovih transformacija, koje odgovaraju funkcijama pod brojem 34 i 35 Doetschove tablice i koje glase

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{J_\nu(at)}{t}\, dt = \frac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^\nu}{\nu a^\nu} \qquad (\operatorname{Re}(\nu) > 0) \tag{56}$$

i

$$\int_0^\infty e^{-st} t^\nu J_\nu(at)\, dt = \frac{(2a)^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(s^2+a^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \qquad \left(\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}\right), \tag{57}$$

apscisa konvergencije dana apsolutnom vrijednošću imaginarnog dijela konstante a, i samo je onda jednaka nuli, kao što je tamo naznačeno, ako je ta konstanta realna.

2. Kompozicija dviju ili više Besselovih funkcija nultoga reda

Relacija (4), napisana oznakama prema (5), glasi:

$$\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2})\, dt = \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{\sqrt{s^2+c^2}}$$

$$(x \geqq 0,\ \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im}(c)|,\ c \text{ po volji}), \tag{58}$$

gdje je još uzet u obzir stavak IV. 1. Integriramo li ovu jednakost po x od x do ∞, izmijenivši na lijevoj strani poredak integracija, što je očito dopušteno, dobijemo:

$$\int_x^\infty \left[\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2})\, dt\right] dx = \int_x^\infty \left[e^{-st} \int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2})\, dx\right] dt =$$

$$= \int_x^\infty \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{\sqrt{s^2+c^2}}\, dx = \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{s^2+c^2}. \tag{59}$$

Prema tome u Laplaceovoj transformaciji (1) odgovara prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x \\ \displaystyle\int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2})\, dx & \text{za } t > x \end{cases} \tag{60}$$

izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{s^2+c^2}. \tag{61}$$

Prema poznatim stavcima[12] operaciji komponiranja u području prvotnih funkcija odgovara operacija množenja u području izvedenih funkcija.

Neka su $x_1 \geqq 0$ i $x_2 \geqq 0$ dva realna parametra i neka je

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_1 \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \tag{62}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_2 \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_2^2}) & \text{za } t > x_2. \end{cases} \tag{63}$$

Tvorimo u smislu I (33) kompoziciju

$$K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) = \int_0^t F_1(y)\, F_2(t-y)\, dy =$$

$$= \int_{x_1}^{t-x_2} J_0(c\sqrt{y^2-x_1^2})\, J_0(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})\, dy \quad (t > x_1+x_2). \tag{64}$$

[12] Doetsch, str. 161, stavak IV b.

Prvotnim funkcijama (62), (63) odgovaraju prema (2), (3) izvedene funkcije

$$f_1(s) = \frac{\exp(-x_1\sqrt{s^2+c^2})}{\sqrt{s^2+c^2}} \tag{65}$$

$$f_2(s) = \frac{\exp(-x_2\sqrt{s^2+c^2})}{\sqrt{s^2+c^2}}, \tag{66}$$

dok kompoziciji $K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2)$ kao prvotnoj funkciji odgovara njihov produkt

$$f_1(s)\, f_2(s) = \frac{\exp[-(x_1+x_2)\sqrt{s^2+c^2}]}{s^2+c^2} \tag{67}$$

kao izvedena funkcija. U drugu ruku prema (60), (61) izvedenoj funkciji (67) odgovara kao prvotna funkcija integral

$$\mathrm{I} = \int_{x_1+x_2}^{t} J_0(c\sqrt{t^2-y^2})\, dy. \tag{68}$$

Budući da je prvotna funkcija, koja pripada zadanoj izvedenoj funkciji, jednoznačno određena,[13] mora kompozicija (64) biti identična s integralom (68), t. j. dobijemo integralan teorem Besselovih funkcija, u kojem ćemo prema III (1) pisati funkciju Λ_0 mjesto funkcije J_0:

$$K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) = \int_{x_1}^{t-x_2} \Lambda_0(c\sqrt{y^2-x_1^2})\, \Lambda_0(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})\, dy =$$

$$= \int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\, dy. \tag{69}$$

Analitičkim produživanjem lako je uvidjeti, da ova relacija vrijedi i onda, kad nije zadovoljena pretpostavka, da su x_1, x_2 i t realni brojevi s uvjetom $t > x_1 + x_2$, već to mogu biti tri bilo koja kompleksna broja, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati (na pr. po odsječcima glatka krivulja), a spaja točke, koje su dane donjim i gornjim granicama integrala. Drugi korijeni, koji se pojavljuju u argumentima funkcija, samo su prividni, jer je Λ_0 tâka funkcija, kako izlazi iz III (1). Integrali u (69) su stoga očito cijele ana-

[13] Ako zahtijevamo, da bude kontinuirana. Vidi Doetsch, str. 34.

litičke funkcije. Istina je, da se u tom poopćenju prvi integral u (69) više ne može smatrati kompozicijom u strogom smislu definicije I (33). Ipak ćemo pridržati taj izraz i u ovom slučaju.

Provede li se postupak integriranja po x od x do ∞, koji je doveo od (58) do (59), r puta, dolazi se do relacije

$$\int_x^{\infty}\left[e^{-st}\left(\int_x^t dx\right)^r J_0(c\sqrt{t^2-x^2})\, dx\right] dt = \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{(\sqrt{s^2+c^2})^{r+1}}. \tag{70}$$

Uzevši još u račun formulu II (154) za n-struku integraciju, možemo dakle reći, da prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x \\ \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_x^t (y-x)^{r-1} J_0(c\sqrt{t^2-y^2})\, dy & \text{za } t > x \end{cases} \tag{71}$$

odgovara izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{\exp(-x\sqrt{s^2+c^2})}{(\sqrt{s^2+c^2})^{r+1}}. \tag{72}$$

Neka su dalje $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0, \ldots, x_r \geqq 0$ realni parametri. Onda prvotnim funkcijama

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_k \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_k^2}) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, r) \tag{73}$$

odgovaraju izvedene funkcije

$$f_k(s) = \frac{\exp(-x_k\sqrt{s^2+c^2})}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (k = 1, \ldots, r). \tag{74}$$

Kompozicija funkcija (73) glasi:

$$K_{0,\ldots,0}^{0,\ldots,0}(t; x_1, \ldots, x_r) = F_1(t) * F_2(t) * \ldots * F_r(t) =$$

$$= \int_0^t dy_1\, F_1(t-y_1) \int_0^{y_1} dy_2\, F_2(y_1-y_2) \ldots \int_0^{y_{r-3}} dy_{r-2}\, F_{r-2}(y_{r-3}-y_{r-2}) \cdot$$

$$\cdot \int_0^{y_{r-2}} dy_{r-1}\, F_{r-1}(y_{r-2}-y_{r-1})\, F_r(y_{r-1}). \tag{75}$$

Uvrstimo li funkcije (73), lako se vidi, da će odbacivanje onih dijelova integrala, za koje su integrandi jednaki nuli, značiti, da se pojedine varijable integracije kreću u ovim granicama:

$$x_r \leqq y_{r-1} \leqq y_{r-2} - x_{r-1} \tag{76a}$$

$$x_r + x_{r-1} \leqq y_{r-2} \leqq y_{r-3} - x_{r-2} \tag{76b}$$

$$x_r + x_{r-1} + x_{r-2} \leqq y_{r-3} \leqq y_{r-4} - x_{r-3} \tag{76c}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_r + x_{r-1} + \ldots + x_3 \leqq y_2 \leqq y_1 - x_2 \tag{76d}$$

$$x_r + x_{r-1} + \ldots + x_2 \leqq y_1 \leqq t - x_1 . \tag{76e}$$

Dobijemo dakle, zamijenivši J_0 sa Λ_0:

$$K^{0,\ldots,0}_{0,\ldots,0}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= \int_{\sum_{k=2}^{r} x_k}^{t-x_1} dy_1 \, \Lambda_0(c\sqrt{(t-y_1)^2 - x_1^2}) \int_{\sum_{k=3}^{r} x_k}^{y_1-x_2} dy_2 \, \Lambda_0(c\sqrt{(y_1-y_2)^2 - x_2^2}) \ldots \int_{x_r + x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} \cdot$$

$$\cdot \, \Lambda_0(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2 - x_{r-2}^2}) \int_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \cdot$$

$$\cdot \, \Lambda_0(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2 - x_{r-1}^2}) \, \Lambda_0(c\sqrt{y_{r-1}^2 - x_r^2}) , \tag{77}$$

gdje je u smislu (76e)

$$t > \sum_{k=1}^{r} x_k . \tag{78}$$

Ovoj kompoziciji odgovara kao izvedena funkcija produkt funkcija (74):

$$f_1(s) f_2(s) \ldots f_r(s) = \frac{\exp\left[-(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)\sqrt{s^2 + c^2}\right]}{(\sqrt{s^2 + c^2})^r} . \tag{79}$$

Stavimo li još

$$X = \sum_{k=1}^{r} x_k , \tag{80}$$

možemo prema (71) i (72) zaključiti, da je

$$K^{0,\ldots,0}_{0,\ldots,0}(t; x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!} \int_X^t (y - X)^{r-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - y^2}) \, dy \tag{81}$$

pod pretpostavkom, da je $t > X$. Razumijevamo li pod

$$K^{0,\ldots,0}_{0,\ldots,0}(t; x_1, \ldots, x_r)$$

izraz (77) i onda, ako su t, x_1, x_2, ..., x_r bilo koji kompleksni brojevi, koji dakle više ne zadovoljavaju uvjet $t > X$, opet se analitičkim produživanjem uviđa, da (81) vrijedi i u tom slučaju.

3. Jednadžbe rekurzije za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda

Za ovo, što slijedi, pretpostavlja se prema potrebi, da su parametri $x_1, x_2, \ldots$ od nule različiti. Slučajevi, kod kojih iščezavanje jednog parametra ili više njih dovodi do teškoća, raspravit će se kasnije. Razmatrajmo kompoziciju

$$K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \int_{x_1}^{t-x_2} y^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) \, (t-y)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2 - x_2^2}) \, dy , \tag{82}$$

pri čemu su m_1, m_2, n_1, n_2 nenegativni cijeli brojevi, t, x_1, x_2 bilo koji kompleksni brojevi, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati, a spaja točke x_1 i $t-x_2$.

Ako su t, x_1, x_2 nenegativni realni brojevi i $t > x_1 + x_2$, možemo (82) shvatiti kao kompoziciju funkcija

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_1 \\ t^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2 - x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \tag{83}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_2 \\ t^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{t^2 - x_2^2}) & \text{za } t > x_2 . \end{cases} \tag{84}$$

U tom slučaju komutativni zakon za operaciju komponiranja daje

$$K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) = K^{m_2, m_1}_{n_2, n_1}(t; x_2, x_1) . \tag{85}$$

Analitičkim produživanjem izlazi, da (85) vrijedi i za bilo koje kompleksne vrijednosti od t, x_1, x_2, a dobije se to i izravno iz (82) supstitucijom $z = t - y$.

Diferenciramo li (82) po x_1 i uzmemo u račun III (9), dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) =$$

$$= -x_1^{m_1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) \quad (86)$$

ili

$$K^{m_1, m_2}_{n_1+1, n_2}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \frac{2(n_1+1)}{c^2 x_1}\left\{\frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1^{m_1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right\} \quad (87)$$

i analogno

$$K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2+1}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{c^2 x_2}\left\{\frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_2^{m_2}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right\}. \quad (88)$$

U (87) i (88) pretpostavlja se $x_1 \neq 0$ odnosno $x_2 \neq 0$. Ove jednadžbe daju mogućnost postepenog povisivanja donjih indeksa kompozicije. Diferenciramo li (82) po t, izlazi s obzirom na III (9):

$$\frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} =$$

$$= (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) + m_2 K^{m_1, m_2-1}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) -$$

$$- \frac{c^2}{2(n_2+1)} K^{m_1, m_2+1}_{n_1, n_2+1}(t; x_1, x_2) \quad (89)$$

ili

$$K^{m_1, m_2+1}_{n_1, n_2+1}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{c^2}\left\{(t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) + m_2 K^{m_1, m_2-1}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right\} \quad (90)$$

i analogno s obzirom na (85)

$$K^{m_1+1, m_2}_{n_1+1, n_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2(n_1+1)}{c^2}\left\{(t-x_1)^{m_2} x_1^{m_1} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) +\right.$$

$$\left. + m_1 K^{m_1-1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right\}. \quad (91)$$

Uvrstimo li u (90) za $K^{m_1, m_2+1}_{n_1, n_2+1}$ izraz, koji daje (88), dobijemo:

$$\frac{\partial K^{m_1, m_2+1}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} =$$

$$= x_2\left\{m_2 K^{m_1, m_2-1}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t}\right\}. \quad (92)$$

Integriramo li po x_2 i odredimo donju granicu integrala tako, da integral iščezava za $t = x_1 + x_2$, kao u (82), izlazi:

$$K^{m_1, m_2+1}_{n_1, n_2}(t; x_1. x_2) =$$

$$= \int_{t-x_1}^{x_2} y\left\{m_2 K^{m_1, m_2-1}_{n_1, n_2}(t; x_1, y) - \frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, y)}{\partial t}\right\} dy \quad (93)$$

i analogno

$$K^{m_1+1, m_2}_{n_1, n_2}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \int_{t-x_2}^{x_1} y\left\{m_1 K^{m_1-1, m_2}_{n_1, n_2}(t; y, x_2) - \frac{\partial K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t; y, x_2)}{\partial t}\right\} dy. \quad (94)$$

Posljednje dvije jednadžbe dopuštaju postepeno povisivanje gornjih indeksa kompozicije. Jednadžbe vrijede i za $m_2 = 0$ odnosno $m_1 = 0$, kada otpada prvi član u vitičastoj zagradi u integrandu. To se razabira, ako se cijeli izvod izvrši pod tom pretpostavkom.

Dajemo još neke jednadžbe rekurzije, koje mogu prema potrebi korisno poslužiti. Prema III (7) vrijedi

$$(y^2-x_1^2)\Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) =$$

$$= \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}\left\{\Lambda_{n_1-1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) - \Lambda_{n_1-2}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\right\}. \quad (95)$$

Pomnožimo li ovu relaciju sa $y^{m_1}(t-y)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})$ i integriramo po y od x_1 do $t-x_2$, dobijemo

$$K_{n_1,n_2}^{m_1+2,m_2} = x_1^2 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2} + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}(K_{n_1-1,n_2}^{m_1,m_2} - K_{n_1-2,n_2}^{m_1,m_2}) \quad (96)$$

i analogno

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+2} = x_2^2 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2} + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2}(K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2} - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2}). \quad (97)$$

Ako se u (92) povisi m_2 za jednu jedinicu i uvrsti izraz (97), izlazi

$$\frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t;x_1,x_2)}{\partial t} = (m_2+1) K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) -$$

$$-\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) - \right.$$

$$\left. - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)\right\}. \quad (98)$$

Integracija po t daje, ako se donja granica odredi tako, da integral iščezava za $t = x_1 + x_2$,

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int_{x_1+x_2}^{t} \left\{(m_2+1) K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - \frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2}\left[K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2)\right]\right\}\right\} dy \quad (99)$$

i analogno

$$K_{n_1,n_2}^{m_1+1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int_{x_1+x_2}^{t} \left\{(m_1+1) K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{x_1 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}\left[K_{n_1-1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - K_{n_1-2,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2)\right]\right\}\right\} dy. \quad (100)$$

4. Izravne formule za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda

Ponovljenom primjenom jednadžbe rekurzije (87) dobije se lako

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_1} n_1!}{c^{2n_1}}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} K_{0,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-k-1}\left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2}\Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right] \quad (101)$$

i dalje

$$K_{0,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_2} n_2!}{c^{2n_2}}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} K_{0,0}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-k-1}\left[x_2^{n_2-1}(t-x_2)^{n_1}\Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right]. \quad (102)$$

Uvrstimo li (102) u (101) i uzmemo u račun, da je prema III (9)

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_r(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) = \frac{c^2}{2(r+1)}\Lambda_{r+1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}), \quad (103)$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) = \frac{c^{2n_1}}{2^{n_1} n_1!}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}), \quad (104)$$

izlazi

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2)}}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} K_{0,0}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-k-1}\left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2}\Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-k-1}\left[x_2^{m_2-1}(t-x_2)^{m_1}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right]. \quad (105)$$

Pri tome pretpostavljamo $n_1 > 0$ i $n_2 > 0$. Ako je na primjer $n_1 = 0$, $n_2 > 0$, otpada prva suma na desnoj strani od (105), t. j. vraćamo se na (102). Slučaj $n_1 = n_2 = 0$ je trivijalan. Time je $K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}$ izraženo pomoću $K^{m_1, m_2}_{0,0}$. Treba još izraziti $K^{m_1, m_2}_{0,0}$ pomoću $K^{0,0}_{0,0}$, koje je dano formulom (69). To ćemo učiniti u točki 6 za općenitiji slučaj kompozicije bilo kojeg broja Besselovih funkcija i onda specijalizacijom izvesti relaciju, koja nam ovdje treba. [Vidi formulu (129).]

Zabilježimo još nešto općenitiju formulu, kojom se svodi $K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}$ na $K^{m_1, m_2}_{p, q}$, gdje je $p < n_1$, $q < n_2$. Ta se formula dobije analognim načinom kao (105) i glasi:

$$K^{m_1, m_2}_{n_1, n_2}(t;\, x_1, x_2) =$$

$$= \frac{2^{n_1+n_2-p-q}\, n_1!\, n_2!}{c^{2(n_1+n_2-p-q)}\, p!\, q!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q} K^{m_1, m_2}_{p, q}(t;\, x_1, x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1-p-1} \frac{2^{n_1-p-k}\, n_1!}{c^{2(n_1-p-k)}\,(p+k)!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p-k-1} \left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-q-1} \frac{2^{n_2-q-k}\, n_2!}{c^{2(n_2-q-k)}\,(q+k)!} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q-k-1} \left[x_2^{m_2-1}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right]. \tag{106}$$

5. Jednadžbe rekurzije za kompoziciju bilo kojeg broja Besselovih funkcija višega reda

Kao poopćenje od (82) definiramo u analogiji sa (77) kompoziciju

$$K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t;\, x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= \int_0^{t-\sum_{k=2}^{r} x_k} dy_1 (t-y_1)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-y_1)^2-x_1^2}\right) \int_0^{y_1-x_2-\sum_{k=3}^{r} x_k} dy_2 (y_1-y_2)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(y_1-y_2)^2-x_2^2}\right) \ldots$$

$$\ldots \int_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} (y_{r-3}-y_{r-2})^{m_{r-2}} \Lambda_{n_{r-2}}\left(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2-y_{r-2}^2}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_x^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Lambda_{n_{r-1}}\left(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2-x_{r-1}^2}\right) \Lambda_{n_r}\left(c\sqrt{y_{r-1}^2-x_r^2}\right), \tag{107}$$

koja se za realne vrijednosti od $t, x_1, \ldots, x_r$ i $t > X$ (vidi (80)) može smatrati kompozicijom funkcija

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_k \\ t^{m_k} \Lambda_{n_k}\left(c\sqrt{t^2-x_k^2}\right) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, r), \tag{108}$$

dok ćemo mi dopuštati i bilo kakve kompleksne vrijednosti od $t, x_1, \ldots, x_r$.

Diferenciramo li (107) po x_1, dobijemo očito:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = -x_1^{m_1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{n_2, \ldots, n_r}(t-x_1; x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K^{m_1,\ m_2, \ldots, m_r}_{n_1+1,\ n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r). \tag{109}$$

Zbog komutativnog zakona za operaciju komponiranja vrijedi analogna formula za bilo koje x_k, t. j.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= -x_k^{m_k} K^{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_{k+1}, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_{k+1}, \ldots, n_r}(t-x_k; x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_k) +$$

$$+ \frac{c^2 x_k}{2(n_k+1)} K^{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r). \tag{110}$$

Diferencira li se (107) po t, izlazi:

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = x_1^{m_1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{n_2, \ldots, n_r}(t-x_1; x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ m_1 K^{m_1-1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) - \frac{c^2}{2(n_1+1)} K^{m_1+1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1+1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) \tag{111}$$

ili pomoću (109)

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = m_1 K^{m_1-1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) -$$

$$- \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} K^{m_1+1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) \tag{112}$$

i analogno za bilo koje x_k:

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= m_k K^{m_1, \ldots, m_{k-1}, m_k+1, m_{k+1}, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r). \quad (113)$$

Isporede li se formule (109), (110) i (111) sa (86), (89), vidi se, da (109) do (111) vrijede i za $r = 2$, ako se definira

$$K^m_n(t; x) = t^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2 - x^2}). \quad (114)$$

Razumije se, da i formule (112), (113) vrijede i za $r = 2$ te u tom slučaju odgovaraju formuli (92). U analogonu formule (93), koji bismo dobili iz (112), bila bi integracija po prvom parametru protegnuta od $t - X + x_1$ do x_1 tako da integral iščezava za $t = X$.

6. Izravne formule za kompoziciju bilo kojeg broja Besselovih funkcija višega reda

Pretpostavimo $r \geqq 2$ i primijenimo na (112) operaciju S_{x_1} definiranu prema II (135) sa $g_1(x_1) = x_1$. Uoči li se, da sve kompozicije (107) zadovoljavaju uvjet II (148), kako se odmah uviđa, izlazi s obzirom na stavak II. 5.:

$$K^{m_1+1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= S_{x_1}\left\{ m_1 K^{m_1-1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) - \frac{\partial}{\partial t} K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) \right\}. \quad (115)$$

Ova relacija vrijedi i za $m_1 = 0$, kad prvi član u vitičastoj zagradi otpada, analogno kao što je to bilo kod (93), (94).

Izbjegavajmo najprije svaku komutaciju operatora S_{x_1} i $\frac{\partial}{\partial t}$. Označimo li radi kratkoće samo prvi gornji indeks kompozicija, dok mjesto S_{x_1} pišemo S, daje postepena primjena jednadžbe rekurzije (115) na primjer:

$$K^4 = \left(3S^2 + 3S^2 \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} + 2S \frac{\partial}{\partial t} S^2 \frac{\partial}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S + \right.$$

$$\left. + S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t}\right) K^0. \quad (116)$$

Pogled na tu jednakost pokazuje, da desno od svakog $\frac{\partial}{\partial t}$ stoji S ili K^0, i lako je vidjeti potpunom indukcijom, da to vrijedi i za bilo koje K^m. Prema stavku II. 5. komutira dakle svako $\frac{\partial}{\partial t}$ s operatorom, koji mu je nalijevo, pa stoga možemo u svakom članu operatore $\frac{\partial}{\partial t}$, počevši s onim, koji stoji najdalje nalijevo u dotičnom članu, postepeno pomicati na lijevi kraj člana. Time prelazi (116) u oblik

$$K^4 = \left[3S^2 + 6\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S^3 + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^4 S^4\right] K^0. \quad (117)$$

Općenito vrijedi, kako se dokazuje potpunom indukcijom na temelju (115):

$$K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= (-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \frac{1}{2^k k! (m_1 - 2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1-2k} S^{m_1-k}_{x_1} K^{0, m_2, \ldots, m_r}_{n_1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r). \quad (118)$$

Da taj dokaz izvršimo, nadovezujemo najprije na stavak II. 5. Tvrdimo, da izraz $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^q f(t; x_1, \ldots, x_r)$, gdje S^q znači produkt od q operatora $S_{g_k(x_k)}$ $(k = 1, \ldots, r)$, koji ne moraju biti međusobno jednaki, zadovoljava uvjet II (148), ako to čini funkcija $f(t; x_1, \ldots, x_r)$ i ako je $p \leqq q$. To svakako vrijedi za $q = 1$, jer je za $p = 0$ izraz jednak Sf, pa je prema istom stavku $\frac{\partial}{\partial t} Sf = S \frac{\partial}{\partial t} f$, čime je operator S na prvom mjestu, pa izraz opet zadovoljava II (148). Pretpostavimo li, da je tvrdnja ispravna za neko q, bit će dopustiva prijetvorba

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p+1} S^{q+1} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) S^q =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1} S \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 S^{q-1} = \ldots = S \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p+1} S^q, \quad (119)$$

čime je S došlo na prvo mjesto, pa tvrdnja vrijedi i za $q + 1$.

Time je tvrdnja dokazana potpunom indukcijom. Iz nje dalje izlazi, da vrijedi

$$S^n \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^q f = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^{n+q} f, \tag{120}$$

ako je $p \leqq q$, a funkcija f zadovoljava II (148). Čitamo li naime (119) zdesna nalijevo, vidimo, da se operatori S jedan po jedan mogu s lijeve strane potencije $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p$ prenijeti na desnu.

Ako dakle na izraz (112) djeluje operacija S_{x_1}, ta se operacija može dodati potenciji $S_{x_1}^{m_1-k}$, jer je $m_1-2k \leqq m_1-k$, a kompozicija $K_{n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_r}^{m_1+1,\ m_2,\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r)$ zadovoljava II (148).

Pretpostavljajući, da relacija (118) vrijedi za neko $m_1 \geqq 1$, uvrstimo je sad u (115) i nadomjestimo u prvoj sumi na desnoj strani k sa $k-1$. Izlazi

$$(-1)^{m_1+1}(m_1+1)! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1+1}{2}\right]} \frac{1}{2^k\, k!\,(m_1-2k+1)!} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}^{0,\ m_2, \ldots, m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = m_1 (-1)^{m_1-1} (m_1-1)! \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^{\left[\frac{m_1+1}{2}\right]} \frac{1}{2^{k-1}(k-1)!\,(m_1-2k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}^{0,\ m_2, \ldots, m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) -$$

$$-(-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \frac{1}{2^k\, k!\,(m_1-2k)} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \ldots, n_r}^{0,\ m_2, \ldots, m_r}(t; x_1, \ldots, x_r), \tag{121}$$

Pretpostavimo najprije

$$1 \leqq k \leqq \frac{m_1}{2}. \tag{122}$$

Članovi s indeksom k daju

$$\frac{(-1)^{m_1+1}(m_1+1)!}{2^k\, k!\,(m_1-2k+1)!} = \frac{(-1)^{m_1-1}(m_1-1)!\, m_1}{2^{k-1}(k-1)!\,(m_1-2k+1)!} -$$

$$- \frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^k\, k!\,(m_1-2k)!}. \tag{123}$$

Dijelimo li sa $(-1)^{m_1-1} m_1!$ i množimo sa $2^k\, k!\,(m_1-2k+1)!$, to dobijemo

$$m_1 + 1 = 2k + m_1 - 2k + 1, \tag{124}$$

što je ispravno. Za $k=0$ dobijemo

$$\frac{(-1)^{m_1+1}(m_1+1)!}{2^0\, 0!\,(m_1+1)!} = -\frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^0\, 0!\, m_1!}, \tag{125}$$

što je ispravno. Ako je m_1 lih broj, može biti $k = \frac{m_1+1}{2} = s$, dakle $m_1 = 2s-1$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{2s}(2s)!}{2^s\, s!\, 0!} = \frac{(-1)^{2s-2}(2s-2)!\,(2s-1)}{2^{s-1}(s-1)!\, 0!}, \tag{126}$$

što je ispravno. Budući da formula (118) vrijedi za $m_1 = 0$ i za $m_1 = 1$, ona je time dokazana. Razumije se, da analogna formula vrijedi za svaki od gornjih indeksa kompozicije. Pođemo li od kompozicije, kojoj su svi gornji indeksi jednaki nuli i provedemo postepeno povišenje pojedinih indeksa prema formuli (118), dobijemo članove s operatorskim produktima oblika

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1-2k_1} S_{x_1}^{m_1-k_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_2-2k_2} S_{x_2}^{m_2-k_2} \ldots,$$

u kojima možemo na temelju (120) sve operatore S premjestiti na desni kraj dotičnog operatorskog produkta, počevši od onih, koji su desnom kraju najbliži. Dobijemo stoga općenito

$$K_{n_1, \ldots, n_r}^{m_1, \ldots, m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = \left(\prod_{k=1}^{r} (-1)^{m_k} m_k!\right).$$

$$\cdot \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \cdots \sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^{r} m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^{r} S_{x_v}^{m_v-k_v}\right) K_{n_1, \ldots, n_r}^{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r). \tag{127}$$

Ako stavimo sve donje indekse jednako nuli i uvrstimo (81), možemo pisati:

$$K_{0,\ \ldots,\ 0}^{m_1,\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!}\left(\prod_{k=1}^{r}(-1)^{m_k} m_k!\right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \cdots \sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^{r} m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^{r} S_{x_v}^{m_v-k_v}\right) \int_X^t (y-X)^{r-2} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy \,. \tag{128}$$

Za $r = 2$ dobije se iz toga:

$$K_{0,\ 0}^{m_1,\ m_2}(t; x_1, x_2) = (-1)^{m_1+m_2} m_1!\, m_2! \cdot$$

$$\cdot \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+m_2-2k_1-2k_2} S_{x_1}^{m_1-k_1} S_{x_2}^{m_2-k_2} \int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy \,. \tag{129}$$

Ova se formula može uvrstiti u (105), pa je time dobiven izraz za $K_{n_1,\ n_2}^{m_1,\ m_2}(t; x_1, x_2)$.

Na temelju jednadžbe rekurzije (109) možemo postaviti opću formulu, koja izražava $K_{n_1,\ \ldots,\ n_r}^{m_1,\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r)$ pomoću $K_{0,\ \ldots,\ 0}^{m_1,\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r)$. Neka je r, kao i dosad, broj parova indeksa kompozicije. (Smatramo, da svaki donji indeks s pripadnim gornjim čini par). Neka je dalje p broj donjih indeksa, koji su veći od nule, dok su ostali donji indeksi jednaki nuli. Dopuštamo $1 \leqq p \leqq r$. (Slučaj $p = 0$ je trivijalan.) Radi jednostavnosti zamišljamo, da je p r v i h p donjih indeksa veće od nule, što zbog komutativnog zakona komponiranja ne znači smanjivanje općenitosti. Neka je Q minimum dvaju brojeva p i $r-1$, t. j. $Q = p$, ako je $p \leqq r-1$ i $Q = r-1$ za $p = r$. Neka konačno $(k_1, k_2, \ldots, k_\gamma)$ znači kombinaciju γ-tog razreda $(1 \leqq \gamma \leqq Q)$ elemenata $1, 2, \ldots, p$, a $(s_1, s_2, \ldots, s_{r-\gamma})$ tomu komplementarnu kombinaciju $(r-\gamma)$-tog razreda, tako da su $k_1, k_2, \ldots, k_\gamma, s_1, s_2, \ldots, s_{r-\gamma}$ svi elementi $1, 2, \ldots, r$. Zbog $1 \leqq \gamma \leqq Q$ i jedna i druga kombinacija imaju uvijek barem jedan elemenat. Pod sumom $\sum_{(k_1, \ldots, k_\gamma)}$ sa zadanim γ razumijevamo, da u dotičnom izrazu treba uvrstiti redom sve kombinacije indeksa $(k_1, \ldots, k_\gamma)$, a istodobno za indekse $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ tomu komplementarnu kombinaciju, i tako nastale izraze zbrojiti. Postavljamo sada opću formulu služeći se oznakom

$$\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} = D_{x_k}\,, \tag{130}$$

koja odgovara oznaci II (134):

$$K_{n_1,\ \ldots,\ n_p,\ 0,\ \ldots,\ 0}^{m_1,\ \ldots,\ m_p,\ m_{p+1},\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_\alpha} n_\alpha ! \left\{\left(\prod_{\beta=1}^{p} D_{x_\beta}^{n_\beta}\right) K_{0,\ \ldots,\ 0}^{m_1,\ \ldots,\ m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) + \right.$$

$$+ \sum_{\gamma=1}^{Q} \sum_{(k_1, \ldots, k_\gamma)} \prod_{\delta=1}^{r-\gamma} D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \cdots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\right) \cdot$$

$$\left. \cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right) K_{0,\ \ldots,\ 0}^{m_{s_1},\ \ldots,\ m_{s_{r-\gamma}}}\left(t - \sum_{\varphi=1}^{\gamma} x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \ldots, x_{s_{r-\gamma}}\right)\right]\right\}. \tag{131}$$

Opaža se, da smo umjesto komplementarne kombinacije $(s_1, \ldots, s_{r-\gamma})$ mogli staviti komplementarnu kombinaciju $(s_1, \ldots, s_{p-\gamma})$, t. j. mogli smo izostaviti elemente $s_{p+1}, \ldots, s_r$, jer ti elementi u produktu $\prod_{\delta=1}^{r-\gamma}$ prinose samo faktore $D_{x_{s_{p+1}}}^0, \ldots, D_{x_{s_r}}^0$, koji znače jedinični operator, pa se mogu izostaviti. Gornja granica spomenutog produkta glasila bi onda $p-\gamma$ umjesto $r-\gamma$, a kompoziciju na kraju formule (131) pisali bismo

$$K_{0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0}^{m_{s_1},\ \ldots,\ m_{s_{p-\gamma}},\ m_{p+1},\ \ldots,\ m_r}\left(t - \sum_{\varphi=1}^{\gamma} x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \ldots, x_{s_{p-\gamma}}, x_{p+1}, \ldots, x_r\right).$$

Za kasnije svrhe ipak nam je zgodnije ostati kod oblika (131). Treba još primijetiti, da za $r \geqq p \geqq r-1$, $\gamma = p$ kompozicija na kraju formule (131) ima samo jedan par indeksa, pa se treba sjetiti definicije (114).

Da dokažemo formulu (131), pretpostavimo $r \geqq 2$ i stavimo u (190) $n_1 = n_2 = \ldots = n_r$. Prema (131) bilo bi za $p = 1$, $n_1 = 1$

$$K^{m_1, m_2, \ldots, m_r}_{1, 0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r) = \frac{2}{c^2}\left\{D_{x_1} K^{m_1, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r) + \right.$$

$$\left. + x^{m_1 - 1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t - x_1; x_2, \ldots, x_r)\right\} \qquad (132)$$

u skladu sa (109). Formula (131) dakle vrijedi za taj slučaj. Pretpostavimo dalje, da je formula (131) dokazana, ako je $p = 1$, a n_1 je neki pozitivan cio broj. Dokazujemo, da (131) onda vrijedi i za $n_1 + 1$. Iz (131) izlazilo bi naime:

$$K^{m_1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1+1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1+1} (n_1+1)! \left\{D^{n_1+1}_{x_1} K^{m_1, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r) + \right.$$

$$\left. + \sum_{w_1=0}^{n_1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D^{n_1 - w_1}_{x_1}\left[x_1^{m_1 - 1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t - x_1; x_2, \ldots, x_r)\right]\right\}. \qquad (133)$$

Izluči li se $\frac{2}{c^2}(n_1 + 1) D_{x_1}$ i odvoji član sume za $w_1 = n_1$, vidi se, da izlazi

$$K^{m_1, m_2, \ldots, m_r}_{n_1+1, n_2, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1}\left\{\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1} n_1! \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-n_1} \frac{1}{n_1!} \cdot \right.$$

$$\cdot x_1^{n_1 - 1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t - x_1; x_2, \ldots, x_r) +$$

$$+ \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1} n_1! D^{n_1}_{x_1} K^{m_1, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r) +$$

$$\left. + \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D^{n_1 - w_1 - 1}_{x_1}\left[x_1^{m_1 - 1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t - x_1; x_2, \ldots, x_r)\right]\right\} =$$

$$= \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1}\left\{x_1^{m_1 - 1} K^{m_2, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t - x_1; x_2, \ldots, x_r) + \right.$$

$$\left. + K^{m_1, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_r}(t; x_1, \ldots, x_r)\right\} \qquad (134)$$

u suglasnosti sa (109). Budući da analogni dokaz vrijedi za bilo koje x_k, time je potpunom indukcijom dokazano, da (131) vrijedi za $p = 1$.

Pretpostavimo sad, da (131) vrijedi za neko p ($1 \leqq p \leqq r-1$). Dokazujemo, da onda vrijedi i za $p + 1$. Neka su dakle $n_1, \ldots, n_p$ bilo koji pozitivni cijeli brojevi i neka je ponajprije $n_{p+1} = 1$. U izrazu, što ga za taj slučaj daje (131), razmotrimo članove, kod kojih je u kombinaciji $(k_1, \ldots, k_\gamma)$ sadržan broj $p + 1$. Indeks sumacije w_{p+1} zbog $n_{p+1} = 1$ dobiva samo jedinu vrijednost nula, pa se iz svih tih članova može izlučiti $x_{p+1}^{m_{p+1} - 1}$ i k tome dodati faktor $\frac{2}{c^2}$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, očito je isti onaj, što ga daje

$$K^{m_1, \ldots, m_p, m_{p+2}, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_p, 0, \ldots, 0}(t - x_{p+1}; x_1, \ldots, x_p, x_{p+2}, \ldots, x_r)$$

prema formuli (131). Prvi član u vitičastoj zagradi, kako ga ta formula daje za ovu posljednju kompoziciju, nastaje od one kombinacije $(k_1, \ldots, k_\gamma)$, u kojoj se nalazilo samo $p + 1$.

Razmotrimo dalje članove, koji odgovaraju kombinacijama $(k_1, \ldots, k_\gamma)$, u kojima nije sadržano $p + 1$. Iz tih članova se može izlučiti $D_{x_{p+1}}$, (koje se nalazi među faktorima $D^{n_{s_\delta}}_{x_{s_\delta}}$), a taj isti faktor se može izlučiti i iz prvog člana u vitičastoj zagradi, koji bi glasio

$$\left(\prod_{\beta=1}^{p+1} D^{n_\beta}_{x_\beta}\right) K^{m_1, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r) =$$

$$= D_{x_{p+1}}\left(\prod_{\beta=1}^{p} D^{n_\beta}_{x_\beta}\right) K^{m_1, \ldots, m_r}_{0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r). \qquad (135)$$

I ovdje dodajemo faktor $\frac{2}{c^2}$ od produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, očito je prema (131) jednak

$$K^{m_1, \ldots, m_p, m_{p+1}, \ldots, m_r}_{n_1, \ldots, n_p, 0, \ldots, 0}(t; x_1, \ldots, x_r).$$

Izlazi dakle

$$K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,1,0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r) =$$

$$= \frac{2}{c^2}\left\{x_{p+1}^{m_{p+1}-1}\,K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}(t-x_{p+1};x_1,\ldots,x_p,x_{p+2},\ldots,x_r) + \right.$$

$$\left. + D_{x_{p+1}}\,K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r)\right\}, \quad (136)$$

što odgovara formuli (110), ako se u njoj mjesto k piše $p+1$ i stavi $x_{p+1}=1$. Budući da je u kompozicijama na desnoj strani od (136) broj od nule različitih donjih indeksa jednak p, prema pretpostavci s pravom smo na njih primijenili formulu (131), a relacija (136) dokazuje, da je ta formula (131) ispravna i za kompoziciju na lijevoj strani, gdje je taj broj indeksa jednak $p+1$, a $(p+1)$-ti indeks jednak jedan.

Pretpostavimo dalje, da je relacija (131) dokazana onda, kad je $(p+1)$-ti indeks n_{p+1} neki pozitivan cio broj. Dokazujemo, da formula vrijedi i onda, ako je taj indeks jednak $n_{p+1}+1$. Primijenimo opet formulu (131) na taj slučaj, da je $(p+1)$-ti indeks $n_{p+1}+1$. Razmotrimo li članove, koji daju kombinacije $(k_1,\ldots,k_\gamma)$, u kojima je sadržan broj $p+1$, uzevši u račun samo vrijednost indeksa sumacije $w_{p+1}=n_{p+1}$, i izlučimo $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_{p+1}+1}(n_{p+1}+1)!$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_{p+1}}\frac{1}{w_{p+1}!}=\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-n_{p+1}}\frac{1}{n_{p+1}!}$ iz dotičnih članova između zagrada, dakle ukupno $\frac{2}{c^2}(n_{p+1}+1)$, dobivamo izraz, koji prema (131) odgovara veličini

$$K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}(t-x_{p+1};x_1,\ldots,x_p,x_{p+2},\ldots,x_r).$$

Razmotrimo li sve ostale članove, možemo izlučiti $D_{x_{p+1}}$. Ovaj se operator nalazi među faktorima $D^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}_{x_{k_\varepsilon}}$, ako je $p+1$ sadržano u kombinaciji $(k_1,\ldots,k_\gamma)$, pa je tada za $k_\varepsilon=p+1$ $D^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}_{x_{k_\varepsilon}}$ nadomješteno sa $D^{n_{p+1}-w_{p+1}}_{x_{p+1}}$, jer je $(p+1)$-ti indeks $n_{p+1}+1$ umjesto n_{p+1}. Tu dakle izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Ako $p+1$ nije sadržano u kombinaciji $(k_1,\ldots,k_\gamma)$, među faktorima se

$D^{n_{s_\delta}}_{x_{s_\delta}}$ nalazi jedan, koji glasi $D^{n_{p+1}+1}_{x_{p+1}}=D_{x_{p+1}}D^{n_{p+1}}_{x_{p+1}}$. I ovdje izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Odvojimo li još faktor $\frac{2}{c^2}(n_{p+1}+1)$ iz produkta pred vitičastom zagradom, preostaje izraz, koji je u smislu (131) jednak

$$K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,n_{p+1}+1,0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r).$$

Dobili smo dakle

$$K^{m_1,\ldots,m_{p+1},m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_{p+1},0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r) = \frac{2(n_{p+1}+1)}{c^2}\cdot$$

$$\cdot\left\{x_{p+1}^{m_{p+1}-1}\,K^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}(t-x_{p+1};x_1,\ldots,x_p,x_{p+2},\ldots,x_r) + \right.$$

$$\left. + D_{x_{p+1}}\,K^{m_1,\ldots,m_{p+1},m_{p+2},\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_{p+1},0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r)\right\}. \quad (137)$$

Primjena formule (131) na prvu kompoziciju desne strane od (137) opravdana je, jer ta kompozicija ima samo p donjih indeksa, koji su od nule različiti, a primjena na drugu kompoziciju desne strane opravdana je prema pretpostavci, jer je $(p+1)$-ti donji indeks n_p. Relacija (137) dokazuje, da je onda relacija (131) ispravna i za lijevu stranu formule (137). Tim je potpunom indukcijom izvršen dokaz za formulu (131).

Radi boljeg pregleda napisat ćemo tu formulu opširnije za slučaj $r=3$, $p=3$:

$$K^{m_1,m_2,m_3}_{n_1,n_2,n_3}(t;x_1,x_2,x_3) =$$

$$= \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1+n_2+n_3} n_1!\,n_2!\,n_3!\left\{D^{n_1}_{x_1}D^{n_2}_{x_2}D^{n_3}_{x_3}\,K^{m_1,m_2,m_3}_{0,0,0}(t;x_1,x_2,x_3) + \right.$$

$$+ D^{n_2}_{x_2}D^{n_3}_{x_3}\sum_{w_1=0}^{n_1-1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1}\frac{1}{w_1!}D^{n_1-w_1-1}_{x_1}\left[\,x_1^{m_1-1}\,K^{m_2,m_3}_{0,0}(t-x_1;x_2,x_3)\right] +$$

$$+ D^{n_1}_{x_1}D^{n_3}_{x_3}\sum_{w_2=0}^{n_2-1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_2}\frac{2}{w_2!}D^{n_2-w_2-1}_{x_2}\left[\,x_2^{m_2-1}\,K^{m_1,m_3}_{0,0}(t-x_2;x_1,x_3)\right] +$$

$$+ D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_3} \frac{1}{w_3!} D_{x_3}^{n_3-w_3-1}\left[x_3^{m_3-1} K_{0,\,0}^{m_1,\,m_2}(t-x_3; x_1, x_2)\right] +$$

$$+ D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_2=2}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1-w_2} \frac{1}{w_1!\, w_2!} \cdot$$

$$\cdot D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_2}^{n_2-w_2-1}\left[x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} K_0^{m_3}(t-x_1-x_2; x_3)\right] +$$

$$+ D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1-w_3} \frac{1}{w_1!\, w_3!} \cdot$$

$$\cdot D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1}\left[x_1^{m_1-1} x_3^{m_3-1} K_0^{m_2}(t-x_1-x_3; x_2)\right] +$$

$$+ D_{x_1}^{n_1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_2-w_3} \frac{1}{w_2!\, w_3!} \cdot$$

$$\cdot D_{x_2}^{n_2-w_2-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1}\left[x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1} K_0^{m_1}(t-x_2-x_3; x_1)\right]\Bigg\}. \quad (138)$$

Želimo li izraziti $K_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},\ldots,m_r}(t; x_1, \ldots, x_r)$ pomoću $K_{0,\ldots,0}^{0,\ldots,0}(t; x_1, \ldots, x_r)$ [vidi (81)], moramo formulu (128) uvrstiti u (131). Pri tome treba uočiti, da se za $r-1 \leqq p \leqq r$ u (131) pojavljuju kompozicije s jednim parom indeksa, kako smo već spomenuli [isporedi (138)], dok (128) vrijedi samo za $r \geqq 2$, a za $r = 1$ vrijedi definicija (114). Razlog, da (128) ne vrijedi za $r = 1$, leži u tom, da za taj slučaj iz (112) ne izlazi (115), jer (112) doduše vrijedi i za $r = 1$, kako je lako uvjeriti se na temelju definicije (114) i formule III (9), ali funkcija $K_n^m(t; x)$ ne zadovoljava uvjet II (148). Moramo stoga u (131) za slučaj, ako ima kompozicija s jednim parom indeksa, dotične članove odvojiti.

Bit će prikladno da dopustimo i negativne cijele potencije integralnih operatora S_{x_k} definirajući

$$S_{x_k}^{-n} = D_{x_k}^{n}. \quad (139)$$

Pretpostavimo dakle najprije $r \geqq 3$ i $1 \leqq p < r-1$. U tom je slučaju $Q = p$ i nema kompozicija s jednim parom indeksa. Uvrštenje formule (128) u (131) daje, ako uzmemo u račun (139):

$$K_{n_1,\ldots,n_p,0,\ldots,0}^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+1},\ldots,m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) = \prod_{\alpha=1}^{p} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \cdots \sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{u=1}^{r}(m_u-2q_u)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left(\prod_{v=1}^{r} (-1)^{m_v} m_v!\, S_{x_v}^{m_v-n_v-q_v} \right) \int_X^t (y-X)^{r-2} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ \frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{\gamma=1}^{p} \sum_{(k_1,\ldots,k_\gamma)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \cdots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1} \right) \sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2}\right]} \cdots \sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)} \cdot \right.$$

$$\cdot \left(\prod_{\delta=1}^{r-\gamma} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta} \right) \cdot$$

$$\left. \left. \cdot \int_{x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})} (y-x_{s_1}-\ldots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right) dy \right] \right\}. \quad (140)$$

Ako je naprotiv $r-1 \leqq p \leqq r$, bit će $Q = r-1$, a članove sa $\gamma = r-1$ ćemo odijeliti. Dobijemo na pr. za $p = r$ ($r \geqq 2$):

$$K^{m_1,\ldots,m_{r-1},m_r}_{n_1,\ldots,n_{r-1},0}(t;x_1,\ldots,x_r)=\prod_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{2}{e^2}\right)^{n_\alpha}n_\alpha!\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{(r-2)!}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\cdots\sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{u=1}^{r}(m_u-2q_u)}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{v=1}^{r}(-1)^{m_v}m_v!\,S^{m_v-n_v-q_v}_{x_v}\right)\int_X^t(y-X)^{r-2}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right)dy+$$

$$+\frac{1}{(r-\gamma-2)!}\sum_{\gamma=1}^{r-2}\sum_{(k_1,\ldots,k_\gamma)}\sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1}\cdots\sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1}\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon}\frac{1}{w_\varepsilon!}D^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}_{x_{k_\varepsilon}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right)\sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2}\right]}\cdots\sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\varphi=1}^{r}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)}\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\prod_{\delta=1}^{r-\gamma}(-1)^{m_{s_\delta}}m_{s_\delta}!\,S^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}_{x_{s_\delta}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left.\int_{x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})}(y-x_{s_1}-\ldots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy\right]+$$

$$+\sum_{(k_1,\ldots,k_{r-1})}\sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1}\cdots\sum_{w_{r-1}=0}^{n_{k_{r-1}}-1}\left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon}\frac{1}{w_\varepsilon!}D^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}_{x_{k_\varepsilon}}\right)D^{n_{s_1}}_{s_1}\cdot$$

$$\cdot\left.\left.\left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1}x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right)(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^{m_{s_1}}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right)\right]\right\}.\right. \tag{141}$$

Pri tom je s_1 onaj broj između brojeva $1,\ldots,r$, koji nije sadržan u kombinaciji $(k_1,\ldots,k_{r-1})$.

Za $p=r-1$ formula ostaje formalno ista, samo što se kombinacije $(k_1,\ldots,k_\gamma)$ tvore od brojeva $1,\ldots,k_{r-1}$, pa u zadnjoj sumi dobijemo jedinu kombinaciju $(k_1,\ldots,k_{r-1})=(1,\ldots,r-1)$ sa $D^{n_{s_1}}_{x_{s_1}}=D^{n_r}_{x_r}=D^0_{x_r}=I$.

7. Kanonski oblik integralnih teorema

Pokušajmo desnu stranu najopćenitijeg integralnog teorema (141) izraziti pomoću što manjeg broja što jednostavnijih funkcija. Uzmu li se u račun formule (130), II (116), III (255) i III (119), a ova posljednja formula s oznakama prema III (1) glasi

$$\Lambda_n(z)=n!\left\{\Lambda_1(z)\sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-1)^w\,[(n-w-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w}(w!)^2(n-2w-1)!}-\right.$$

$$\left.-\Lambda_0(z)\sum_{w=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\frac{(-1)^w\,(n-w-2)!\,(n-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w-2}w!\,(w+1)!\,(n-2w-2)!}\right\}, \tag{142}$$

onda se iz posljednje višestruke sume u vitičastoj zagradi u (141) razabira, da ponovljena primjena operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}$ i $D_{x_{s_1}}$ na izraz u uglastoj zagradi u (141) daje očito funkciju oblika

$$R_0(t;x_1,\ldots,x_r)\cdot\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right)+$$

$$+R_1(t;x_1,\ldots,x_r)\cdot\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right), \tag{143}$$

gdje su R_0 i R_1 racionalne funkcije od $t,x_1,\ldots,x_r$. Da su te funkcije racionalne, uzrokovano je napose time, što su sve potencije od z u (142) tâke, tako da korijen u argumentu Besselove funkcije otpada, kad se uvrsti mjesto z u formulu (142).

Razmotrimo sad srednju višestruku sumu u vitičastoj zagradi u formuli (141). Pretpostavimo najprije, da je eksponent operatora $S_{x_{s_\delta}}$ pozitivan. Stavimo li

$$t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})=\bar{t}, \tag{144}$$

$$x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}=\bar{X}, \tag{145}$$

$$\varphi(\bar{t},y)=\Lambda_0\left(c\sqrt{\bar{t}^2-y^2}\right), \tag{146}$$

može se integral u srednjoj višestrukoj sumi u (141) nakon izvršenja operacije $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}$ prema II (186) i II (188) svesti na oblik

$$\int_0^{\overline{t}-\overline{X}} \Phi(y)\varphi(\overline{t}, y+\overline{X})\,dy = \int_{\overline{X}}^{\overline{t}} \Phi(y-\overline{X})\,\varphi(\overline{t}, y)\,dy =$$

$$\int_{\overline{X}}^{\overline{t}} \Phi(y-\overline{X})\,\Lambda_0(c\sqrt{\overline{t}^2-y^2})\,dy =$$

$$= \int_{x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})} \Phi(y-x_{s_1}-\ldots-x_{s_{r-\gamma}})\,\cdot$$

$$\cdot\,\Lambda_0(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2})\,dy, \qquad (147)$$

gdje je Φ u smislu II (189) cijela racionalna funkcija od $y, x_{s_1}, \ldots, x_{s_{r-\gamma}}$. Djeluje li na takav integral operacija $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_{s_\varphi}-2v_\varphi}$ i zatim, poslije množenja sa $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}$, operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}$, očito će diferencijacije pod znakom integracije s obzirom na III (9) povisivati indeks Λ-funkcije, koja će biti pomnožena cijelom racionalnom funkcijom od $y, x_1, \ldots, x_r$, dok će pred dobivenim integralima stajati racionalne funkcije od $x_{k_1}, \ldots, x_{k_\gamma}$. Rastavljanjem tih integrala po pojedinim potencijama od y dolazimo na integrale oblika

$$\int_{\overline{X}}^{\overline{t}} y^m\,\Lambda_n(c\sqrt{\overline{t}^2-y^2})\,dy,$$

pomnožene racionalnim funkcijama od $x_1, \ldots, x_r$, a ti se integrali prema III (382) do (385), III (339) i III (318), III (326) mogu izraziti u obliku

$$R_0\Lambda_0(c\sqrt{\overline{t}^2-\overline{X}^2}) + R_1\Lambda_1(c\sqrt{\overline{t}^2-\overline{X}^2}) + R_2\int_{\overline{X}}^{\overline{t}} \Lambda_0(c\sqrt{\overline{t}^2-y^2})\,dy +$$

$$+ R_3\int_{\overline{X}}^{\overline{t}} \Lambda_1(c\sqrt{\overline{t}^2-y^2})\,dy + R_4, \qquad (148)$$

gdje $\overline{t}$ i $\overline{X}$ imaju značenje (144), (145), a R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 su racionalne funkcije od $t, x_1, \ldots, x_r$. Diferencijacije po gornjoj granici integrala (147) dovode očito do analognih izraza kao (143), pa ih možemo smatrati već sadržanim u (148). Slučaj, da je eksponent od $S_{x_{s_\delta}}$ u (141) jednak nuli ili negativan, ne daje nikakvih načelnih promjena u razmatranju, jer se time samo pojednostavnjuje funkcija Φ u (147) i u smislu (139) dodaju nove operacije diferenciranja.

Prva višestruka suma u vitičastoj zagradi u (141) dopušta isto razmatranje, pa je rezultat sadržan u obliku (148) za $\gamma = 0$, u kojem je slučaju $t = \overline{t}$ i $X = \overline{X}$. Isto tako je i (143) specijalan slučaj od (148) za $\gamma = r-1$ (pri čemu je $R_2 = R_3 = R_4 = 0$), tako da se (141) može izraziti pomoću članova oblika (148). Razumije se, da to vrijedi i za slučaj (140), koji se od (141) razlikuje u tome, što izvjesnih članova nema.

Označimo sad sa N broj kombinacija nultog do $(r-1)$-tog razreda elemenata $1, \ldots, r$, i numerirajmo sve te kombinacije od 1 do N. (Nije teško vidjeti, da je $N = 2^r-1$). Neka je $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_\gamma})$ k-ta od tih kombinacija. Stavljamo

$$x_{k_1} + \ldots + x_{k_\gamma} = a_k \quad (k = 1, \ldots, N) \qquad (149)$$

$$x_{s_1} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}} = b_k \quad (k = 1, \ldots, N). \qquad (150)$$

Napose neka je prva kombinacija ona, koja odgovara $\gamma = 0$, dakle kombinacija »nikakav elemenat«, koja je nultog razreda, pa je za taj slučaj

$$a_1 = 0, \quad b_1 = x_1 + \ldots + x_r = X. \qquad (151)$$

Razumije se, da je uvijek

$$a_k + b_k = X \quad (k = 1, \ldots, N). \qquad (152)$$

Možemo sada integralni teorem (141) dovesti u oblik

$$K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;x_1,\ldots,x_r) = \sum_{k=1}^{N} R_{0,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{1,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{2,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{3,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy +$$

$$+ R_4(t;x_1,\ldots,x_r), \qquad (153)$$

gdje su R_0, $R_{1,k}$, $R_{2,k}$, $R_{3,k}$ $(k=1,\ldots,N)$ i R_4 racionalne funkcije od $t,x_1,\ldots,x_r$). Pri tome su s obzirom na (143) svakako neke od veličina $R_{2,k}$ i $R_{3,k}$ jednake nuli, na što se međutim ne obaziremo.

Oblik (153) integralnih teorema nazvat ćemo kanonskim oblikom tih teorema. Pita se, da li je u tom izrazu, koji je linearan s obzirom na funkcije

$$\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right),\quad \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right)$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy,\quad \int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy,$$

$$(k=1,\ldots,N),$$

broj tih funkcija sveden na minimum, t. j. ne daju li se možda neke od tih funkcija linearno izraziti pomoću ostalih funkcija, s koeficijentima, koji su racionalne funkcije od $t,x_1\ldots,x_r$. Razumije se, da bi to moralo vrijediti za bilo kakve vrijednosti parametara $x_1,\ldots,x_r$ (izuzevši vrijednost nula, koju zasad isključujemo) i varijable t. Ovo je pitanje ekvivalentno s pitanjem, da li između navedenih funkcija postoji linearna relacija s koeficijentima, koje su racionalne funkcije od $x_1,\ldots,x_r$ i t. Dokažemo li, da takve relacije ne može biti, time je i dokazano, da se ne daju pojedine od navedenih funkcija izraziti linearno pomoću ostalih i da su prema tome racionalne funkcije, koje fungiraju kao koeficijenti u izrazu (153), jednoznačno određene. Na temelju takvog dokaza bit će opravdan naziv »kanonski oblik« za izraz (153).

Treba primijetiti, da za taj dokaz nisu dovoljni poznati kriteriji linearne nezavisnosti (determinanta Wronskoga i Gramova determinanta), jer koeficijenti nisu konstante, već racionalne funkcije varijable t. Jasno je, da je dovoljno dokazati nemogućnost linearne relacije za neke specijalne vrijednosti parametara $x_1,\ldots,x_r$. Odabiramo stoga parametre $x_1,\ldots,x_r$ tako, da bude zadovoljen uvjet, da ni u kojem paru jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j^2 &= b_k^2 \end{aligned}\right\} \quad (j\neq k;\ j,k=1,\ldots,N) \qquad (154)$$

ne budu zadovoljene obje jednadžbe i da za najviše jednu vrijednost k_1 indeksa k bude

$$b_{k_1}=0. \qquad (154a)$$

Da je moguće odabrati parametre $x_1,\ldots,x_r$ tako, da ovaj uvjet bude zadovoljen, izlazi iz poznatog stavka algebre[14]:

»Ako su $f_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,f_r(x_1,\ldots,x_r)$ bilo kakvi polinomi, koji ne iščezavaju identično, i ako je M neki skup od neizmjerno mnogo veličina, na pr. skup cijelih brojeva, mogu se za varijable $x_1, x_2,\ldots, x_r$ na neizmjerno mnogo načina odabrati takve veličine $\lambda_1,\ldots,\lambda$ skupa M, da bude $f_\nu(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)\neq 0$ za $\nu=1,\ldots,n$.« Stavimo li za naš slučaj

$$f_{j,k}(x_1,\ldots,x_r)=a_j-a_k+i(b_j^2-b_k^2)\quad (j\neq k;\ j,k=1,\ldots,N), \qquad (155)$$

jasno je, da su prema (149), (150) te funkcije polinomi varijabla $x_1,\ldots,x_r$, koji ne iščezavaju identično, jer bi inače za realne varijable realni dio bio a_j-a_k, i taj bi realni dio morao identično iščezavati, što je nemoguće, jer su a_j i a_k sume elemenata različitih kombinacija varijabla $x_1,\ldots,x_r$. Odaberemo li za M na pr. skup pozitivnih cijelih brojeva, uklonili smo se vrijednosti nula za parametre $x_1,\ldots,x_r$, pa i za brojeve b_k, a primjena citiranog stavka daje mogućnost da se zadovolji željeni uvjet. Na temelju toga izvest ćemo u idućoj točki dokaz, da je nemoguća linearna relacija između spomenutih funkcija, s koeficijentima, koji su racionalne funkcije varijable t.

[14] O. Perron: Algebra I., W. de Gruyter, Berlin u. Leipzig 1932, str. 77, stavak 29.

8. Dokaz jednoznačnosti kanonskog oblika integralnih teorema

Dokazujemo

STAVAK IV. 8. Neka je zadano N parova kompleksnih brojeva a_k, b_k $(k=1,\ldots,N)$ tako, da ni u kojem od parova jednadžbi

$$\left.\begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j^2 &= b_k^2 \end{aligned}\right\} \quad (j \neq k;\ j,k=1,\ldots,N) \tag{156}$$

nisu zadovoljene obje jednadžbe i da najviše za jednu vrijednost k_1 indeksa vrijedi $b_{k_1}=0$ (156a); neka su dalje $R_{0,k}$, $R_{1,k}$, $R_{2,k}$, $R_{3,k}$ $(k=1,\ldots,N)$ i R_4 cijele racionalne funkcije varijable t, koje nisu sve identično jednake nuli: onda je nemoguće, da postoji identitet oblika

$$\sum_{k=1}^{N} R_{0,k}\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \sum_{k=1}^{N} R_{1,k}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{2,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{3,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy + R_4 \equiv 0\,. \tag{157}$$

Jasno je, da se slučaj, ako su koeficijenti R razlomljeno racionalne funkcije, koji nama treba, može svesti na ovaj, ako se identitet pomnoži zajedničkim višekratnikom svih nazivnika. Uvest ćemo još pojednostavnjenje $c=1$ (158), koje ne znači smanjivanje općenitosti, jer se to pojednostavnjenje može postići supstitucijom

$$t = \frac{\bar{t}}{c}\,,\quad y = \frac{\bar{y}}{c}\,,\quad a_k = \frac{\bar{a}_k}{c}\,,\quad b_k = \frac{\bar{b}_k}{c}\,, \tag{159}$$

koja ne ruši pretpostavke našega stavka.

Izvest ćemo najprije dokaz za slučaj $N=1$. Radi jednostavnosti neka je $a_1=0$, što ne znači smanjivanje općenitosti, jer se to može postići supstitucijom $t=\bar{t}+a_1$ (160). Ispuste li se još suvišni indeksi, radi se dakle o identitetu

$$R_0\,\Lambda_0\left(\sqrt{t^2-b^2}\right) + R_1\,\Lambda_1\left(\sqrt{t^2-b^2}\right) + R_2 \int_b^t \Lambda_0\left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ R_3 \int_b^t \Lambda_1\left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy + R_4 \equiv 0\,. \tag{161}$$

Izvest ćemo najprije neke pomoćne formule. Stavi li se u III (216) $n=0$, odnosno $n=1$ i integrira po z od 0 do t, izlazi, ako se mjesto z piše y:

$$\int_0^t \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{(w!)^2} \sum_{k=0}^{w} \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1}\,, \tag{162}$$

$$\int_0^t \Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{w!\,(w+1)!} \sum_{k=0}^{w} \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1}\,. \tag{163}$$

Stavi li se u II (94) $-q=2n+1$ (164) i nadomjesti n sa w, izlazi

$$\sum_{k=0}^{w} \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1} = \frac{2^{2w+1}(w+1)!\,w!}{(2w+2)!} = \frac{2^{2w}(w!)^2}{(2w+1)!}\,. \tag{165}$$

Uvrštenje u (162) i (163) daje

$$\int_0^t \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+1)!} = \frac{1}{c}\sin(ct)\,, \tag{166}$$

$$\int_0^t \Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w\, 2c^{2w}\, t^{2w+2}}{(2w+2)!} =$$

$$= \frac{2}{c^2 t} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w+2} t^{2w+2}}{(2w+2)!} = \frac{2}{c^2 t}\left[1-\cos(ct)\right]. \tag{167}$$

Na temelju tih formula vrijedi, ako se još uvede (158),

$$\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \sin t - \int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy, \qquad (168)$$

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \frac{2}{t}(1-\cos t) - \int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy. \qquad (169)$$

Stavi li se u (42) $c_2 = 0$, $c_1 = -1$ (170) i odijele realni članovi od imaginarnih, izlazi

$$\cos\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right) = \cos(\sqrt{t^2-x^2}-t) = 1 - \frac{x^4}{8t^2} + \\ + \ldots = 1 + O(|t|^{-2}), \qquad (171)$$

$$\sin\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right) = \sin(\sqrt{t^2-x^2}-t) = \\ = -\frac{x^2}{2t} - \left(1-\frac{x^2}{6}\right)\frac{x^4}{8t^3} - \ldots = O(|t|^{-1}). \qquad (172)$$

Piše li se mjesto (realnog) broja x kompleksni broj b, ovi razvoji očito ostaju na snazi, ako je samo predznak korijena tako odabran, da bude

$$\lim_{|t|\to\infty}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}} = \lim_{|t|\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-b^2}}{t} = +1, \qquad (173)$$

pri čemu i t može biti kompleksna varijabla. Vrijedi dakle

$$\cos(\sqrt{t^2-b^2}-t) = 1 + O(|t|^{-2}), \qquad (174)$$

$$\sin(\sqrt{t^2-b^2}-t) = O(|t|^{-1}). \qquad (175)$$

Možemo stoga pisati

$$\sin\left(\sqrt{t^2-b^2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\cos(\sqrt{t^2-b^2}-t) + \\ + \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\sin(\sqrt{t^2-b^2}-t) = \\ = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(|t|^{-2})] + \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)O(|t|^{-1}) \qquad (176)$$

i analogno

$$\cos\left(\sqrt{t^2-b^2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(|t|^{-2})] - \\ - \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)O(|t|^{-1}). \qquad (177)$$

Ako je imaginarni dio varijable t ograničen, a realni dio teži prema $\pm\infty$, $\left|\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ i $\left|\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right|$ su ograničeni, pa je očito za taj slučaj

$$\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)O(|t|^{-n} = O(|t|^{-n}), \qquad (178)$$

$$\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)O(|t|^{-n} = O(|t|^{-n}), \qquad (179)$$

dakle prema (176) i (177)

$$\sin\left(\sqrt{t^2-b^2}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-1}), \qquad (180)$$

$$\cos\left(\sqrt{t^2-b^2}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-1}), \qquad (181)$$

Iz (11) izlazi za $\nu = 0$ i $\nu = 1$ s obzirom na III (1):

$$\Lambda_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(|z|^{-2})] + \sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)O(|z|^{-1})\right\}, \qquad (182)$$

$$\Lambda_1(z) = \frac{2}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)[1+O(|z|^{-2})] + \cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)O(|z|^{-1})\right\}. \qquad (183)$$

Zbog (173) očito vrijedi

$$O(|\sqrt{t^2-b^2}|^{-n}) = O(|t|^{-n}). \qquad (184)$$

Nadomjesti li se u (182), (183) z sa $\sqrt{t^2-b^2}$, gdje je t varijabla s ograničenim imaginarnim dijelom i s realnim dijelom, koji teži prema $+\infty$, bit će s obzirom na (173) zadovoljen uvjet (13) (i onda, ako je imaginarni dio od t jednak nuli), pa se dobije pomoću (180), (181), (184)

$$\Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left\{\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-1})\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}), \qquad (185)$$

$$\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left\{\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-1})\right\} =$$

$$= \frac{2}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right) + O(|t|^{-\frac{5}{2}}). \qquad (186)$$

S obzirom na (178), (179) izlazi također

$$\Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2}) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \qquad (187)$$

$$\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \qquad (188)$$

što, drukčije rečeno, znači, da postoji konačni

$$\limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{1}{2}} \left|\Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2})\right| \text{ i } \limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{3}{2}} \left|\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2})\right|,$$

gdje t tako teži prema ∞, da realni dio teži prema $+\infty$, dok imaginarni dio ostaje ograničen.

Označuje li $M_0(t)$ maksimum funkcije $\left|\Lambda_0(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right|$, a $M_1(t)$ maksimum funkcije $\left|\Lambda_1(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right|$ s obzirom na realnu varijablu λ, koja prelazi zatvoreni interval $(0, 1)$, pod istim će uvjetima očito postojati i konačan

$$\limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{1}{2}} M_2(t) \text{ i } \limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{2}{3}} M_1(t), \text{ ili}$$

$$M_0(t) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (189), \qquad M_1(t) = O(|t|^{-\frac{2}{3}}) \quad (190).$$

Iz toga izlazi

$$\left|\int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy\right| = \left|\int_0^1 b\Lambda_0(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\,d\lambda\right| \leqq$$

$$\leqq |b|\int_0^b \left|\Lambda_0(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right| d\lambda \leqq |b| M_0(t), \qquad (191)$$

dakle

$$\int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \qquad (192)$$

i analogno

$$\int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \qquad (193)$$

Prema (168), (169) dobivamo dakle

$$\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \sin t + O(|t|^{-\frac{1}{2}}), \qquad (194)$$

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \frac{2}{t}(1-\cos t) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \qquad (195)$$

Poslije ovih priprava prelazimo na dokaz nemogućnosti identiteta (161). Neka je t realna varijabla, a m najveći stupanj polinoma R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, pa stavimo prema tome

$$R_0 = p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \qquad (196a)$$

$$R_1 = q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \qquad (196b)$$

$$R_2 = r_m t^m + r_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \qquad (196c)$$

$$R_3 = s_m t^m + s_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \qquad (196d)$$

$$R_4 = u_m t^m + u_{m-1} t^{m-1} + \ldots, \qquad (196e)$$

gdje je barem jedan od koeficijenata p_m, q_m, r_m, s_m, u_m od nule različit. Označimo li lijevu stranu identiteta (161) sa $F(t)$, izlazi iz toga identiteta na temelju (185), (186), (194), (195), (196):

$$\lim_{t\to\infty} t^{-m} F(t) = \lim_{t\to\infty} (r_m \sin t + u_m) = 0, \qquad (197)$$

dakle zbog periodiciteta sinusa

$$r_m \sin t + u_m \equiv 0 \qquad (198)$$

ili

$$r_m = u_m = 0. \qquad (199)$$

To dakle znači, da su R_2 i R_4 najviše $(m-1)$-toga stupnja ili nula (ako je $m = 0$). Time dobivamo dalje

$$\lim t^{-m+\frac{1}{2}} F(t) = \lim p_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (200)$$

dakle

$$p_m = 0. \quad (201)$$

I R_0 je dakle najviše $(m-1)$-toga stupnja ili nula. Izlazi dalje

$$\lim_{t \to \infty} t^{-m+1} F(t) = \lim_{t \to \infty} [r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1}] = 0, \quad (202)$$

dakle zbog periodiciteta izraza u uglastoj zagradi

$$r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1} \equiv 0. \quad (203)$$

Za $t = 0$ izlazi

$$u_{m-1} = 0, \quad (204)$$

za $t = \pi$ dobiva se

$$s_m = 0, \quad (205)$$

a za $t = \frac{\pi}{2}$

$$r_{m-1} = 0, \quad (206)$$

tako da je i R_3 najviše $(m-1)$-toga stupnja ili nula, a R_2 i R_4 najviše $(m-2)$-toga stupnja ili nula. Prema tome je dalje

$$\lim_{t \to \infty} t^{-m+\frac{3}{2}} F(t) = \lim_{t \to \infty} \left[p_{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \right.$$

$$\left. + q_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0, \quad (207)$$

dakle

$$p_{m-1} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + q_m \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0. \quad (208)$$

Za $t = \frac{\pi}{4}$ izlazi

$$p_{m-1} = 0, \quad (209)$$

a za $t = \frac{3\pi}{4}$

$$q_m = 0. \quad (210)$$

Time je i R_1 najviše $(m-1)$-toga stupnja ili nula, a R_0 najviše $(m-2)$-toga stupnja ili nula. Prema (199), (201), (205), (210) svi su dakle koeficijenti p_m, q_m, r_m, s_m, u_m jednaki nuli, t. j. nijedan od polinoma $R_0, \ldots, R_4$ nije m-toga stupnja, što se protivi pretpostavci. Identitet (161) je dakle nemoguć.

Da dokažemo nemogućnost općeg identiteta (157), prenijet ćemo taj identitet pomoću Laplaceove transformacije iz područja prvotnih funkcija u područje izvedenih funkcija. Pomnožimo najprije identitet polinomom

$$G(t) = \prod_{k=1}^{N} (t - a_k - b_k)(t - a_k), \quad (211)$$

koji sigurno ne iščezava identično. Stavimo li

$$R_{0,k}(t) \cdot G(t) = \bar{R}_{0,k}(t), \quad (212)$$

$$R_{1,k}(t) \cdot G(t) = (t - a_k - b_k)\, \bar{R}_{1,k}(t), \quad (213)$$

$$R_{2,k}(t) \cdot G(t) = \bar{R}_{2,k}(t), \quad (214)$$

$$R_{3,k}(t) \cdot G(t) = (t - a_k)\, \bar{R}_{3,k}(t), \quad (215)$$

$$R_4(t) \cdot G(t) = \bar{R}_4(t), \quad (216)$$

opet su i $\bar{R}_{0,k}(t)$, $\bar{R}_{1,k}(t)$, $\bar{R}_{2,k}(t)$, $\bar{R}_{3,k}(t)$, $\bar{R}_4(t)$ polinomi, i njihovo identično iščezavanje je ekvivalentno s identičnim iščezavanjem polinoma $R_{0,k}(t), \ldots, R_4(t)$. Uvedemo li još (158), možemo mjesto identiteta (157) razmatrati identitet

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{R}_{0,k}(t)\, \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_{1,k}(t)\,(t - a_k - b_k)\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{N} \bar{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}\right) dy +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \bar{R}_{3,k}(t)\,(t - a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}\right) dy + \bar{R}_4(t) \equiv 0. \quad (217)$$

Prema (58) vrijedi

$$\int_b^\infty e^{-st}\Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2})\,dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1})}{\sqrt{s^2+1}} \quad (b \geq 0, \mathrm{Re}\,(s) > 0). \quad (218)$$

Kao što je spomenuto u diskusiji formule (4c), može se analitičkim produživanjem uvidjeti, da se b može odabrati i kompleksno, pa se u tom slučaju krivulja integracije počinje u točki b i teži prema $+\infty$. Možemo je napose odabrati i tako, da vodi od točke b do jedne na osi x po volji odabrane točke, a odanle uz os x prema $+\infty$.

Ako je ai imaginarni dio kompleksnoga broja a, supstitucija će $t = \bar{t} - a$ (219) uzrokovati, da se krivulja integracije počinje u točki $a + b$ i teži prema $ai + \infty$. Uočimo li, da je integrand cijela funkcija, koja teži eksponencijalno prema nuli, kad uz ograničeni imaginarni dio realni dio od t teži prema $+\infty$ [isporedi (187)], uviđamo, da se na temelju Cauchyeva teorema put integracije može tako pomaknuti, da od točke $a + b$ teži prema $+\infty$. Vrijedi stoga

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}\Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1}-as)}{\sqrt{s^2-1}} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0). \quad (220)$$

Derivira li se ova jednadžba r puta po s, izlazi

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}t^r\Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt = (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1}-as)}{\sqrt{s^2+1}}. \quad (221)$$

Deriviranje relacije (220) po b daje pomoću III (8)

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}\Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt =$$

$$= \frac{2}{b}\left\{\exp[-(a+b)s] - \exp(-b\sqrt{s^2+1}-as)\right\}. \quad (222)$$

Derivira li se to po s, izlazi

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}t\Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt = \frac{2}{b}\left\{(a+b)\exp[-(a+b)s] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial s}\exp(-b\sqrt{s^2+1}-as)\right\}. \quad (223)$$

Prema (222) i (223) vrijedi

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}(t-a-b)\Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt =$$

$$= \frac{2}{b}\left(\frac{\partial}{\partial s} + a + b\right)\exp(-b\sqrt{s^2+1} - as). \quad (224)$$

Deriviramo to još r puta po s i dobijemo

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}t^r(t-a-b)\Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2})\,dt =$$

$$= (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} + a + b\right)\left[\frac{2}{b}\exp(-b\sqrt{s^2+1} - as)\right]\right\}. \quad (225)$$

Prema (59) vrijedi

$$\int_b^\infty e^{-st}\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})\,dy\,dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1})}{s^2+1} \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0). \quad (226)$$

Nadomjestimo li opet t sa $t-a$, pomaknemo prikladno put integracije i deriviramo r puta po s, izlazi

$$\int_{a+b}^\infty e^{-st}t^r\int_b^{t-a}\Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2-y^2})\,dy\,dt =$$

$$= (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1}-as)}{s^2+1} \quad (227)$$

Ako na temelju (222) izvršimo prijetvorbu analognu onoj, koja je dovela od (58) do (59), i pomnožimo jednadžbu sa e^{as}, dobivamo

$$\int_{a+b}^\infty \exp[-s(t-a)]\int_b^{t-a}\Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-y^2})\,dy\,dt =$$

$$= \int_b^\infty \frac{2}{y}\left[\exp(-ys) - \exp(-y\sqrt{s^2+1})\right]dy \quad (\mathrm{Re}\,(s) > 0). \quad (228)$$

Deriviranje po s i dioba sa e^{as} daje

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}(t-a)\int_{b}^{t-a} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt =$$

$$= \frac{2\exp[-(a+b)s]}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\exp\left(-b\sqrt{s^2+1}-as\right). \quad (229)$$

Derivirajmo tu jednadžbu r puta po s:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}t^r(t-a)\int_{b}^{t-a} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt =$$

$$= (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}\left\{\frac{2\exp[-(a+b)s]}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\exp\left(-b\sqrt{s^2+1}-as\right)\right\}. \quad (230)$$

Uvedimo sad kraticu

$$Q_k(t) = \overline{R}_{0,k}(t)\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \overline{R}_{1,k}(t)(t-a_k-b_k)\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \overline{R}_{2,k}(t)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy +$$

$$+ \overline{R}_{3,k}(t)(t-a_k)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy \quad (231)$$

i načinimo izraz

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N}\int_{a_k+b_k}^{\infty} e^{-st}Q_k(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-st}\overline{R}_4(t)\,dt. \quad (232)$$

Zamislimo li, da put integracije pojedinih integrala pod sumom vodi od $a_k + b_k$ do 0 (na pr. pravocrtno), i zatim od 0 po osi x prema ∞, dijelovi će integrala od 0 do ∞ s posljednjim integralom od (232) prema pretpostavljenom identitetu (217) dati nulu, tako da ostaje

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N}\int_{a_k+b_k}^{0} e^{-st}Q_k(t)\,dt. \quad (233)$$

Time je postignuto, da su otpale teškoće konvergencije, pa je stoga cijela analitička funkcija (233) jednoznačno definirana u cijeloj ravnini. (Dvoznačnost korijena u argumentima Besselovih funkcija ne očituje se, jer su to tâke funkcije svojeg argumenta.) Razumijeva li se pod $\overline{R}_{0,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)$ simbolički izraz, koji se dobije, ako se u polinomu $\overline{R}_{0,k}(t)$ zamijeni općenito t^r sa $(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}$ i analogno za $\overline{R}_{1,k}(t), \ldots, \overline{R}_4(t)$, može se na temelju (221), (225), (227), (230) i na temelju relacije

$$\int_{0}^{\infty} e^{-st}t^r\,dt = \frac{r!}{s^{r+1}} = (-1)^r\frac{\partial^r}{\partial s^r}\frac{1}{s} \quad (234)$$

mjesto (232) pisati

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{R}_{0,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{\exp\left(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s\right)}{\sqrt{s^2+1}} +\right.$$

$$+ \overline{R}_{1,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial s}+a_k+b_k\right)\frac{2\exp\left(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s\right)}{b_k}\right] +$$

$$+ \overline{R}_{2,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{\exp\left(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s\right)}{s^2+1} +$$

$$\left. + \overline{R}_{3,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left[\frac{2\exp[-(a_k+b_k)s]}{s}\cdot\frac{2s\exp\left(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s\right)}{s^2+1}\right]\right\} +$$

$$+ \overline{R}_4\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{1}{s}. \quad (235)$$

Slučaj $b_{k_1} = 0$ [vidi (156a)] ne daje bitnih teškoća. U prvom, trećem i četvrtom članu pod sumom može se izravno staviti $b_{k_1} = 0$, što se može učiniti već u (220), dakle i u (221), zatim u (226) i (227) pa u (229) i (230). U drugom članu dobije se mjesto

$$\frac{2\exp\left(-b_{k_1}\sqrt{s^2+1}-a_{k_1}s\right)}{b_{k_1}}$$

graničnim prijelazom $-2\sqrt{s^2+1}\exp\left(-a_{k_1}s\right)$ što se može izvršiti već u (224) i (225).

U području, u kojem su integrali u (232) konvergentni, funkcija (235) je identična s funkcijom (233), pa analitičkim produživanjem izlazi, da mora s njom biti identična svagdje, t. j. (235) je cijela analitička funkcija i prema tome ne mijenja svoju vrijednost, ako se s uzduž zatvorene krivulje povrati u prvotnu točku.

Riemannova ploha funkcije $\sqrt{s^2+1}$ ima dva razgraništa $s=i$ i $s=-i$, pa obilaženje svakog od tih razgraništa mijenja korijenu predznak. Odaberimo dakle zatvorenu krivulju, koja obuhvaća, recimo, $+i$, a ne obuhvaća $-i$, i zamislimo, da s prođe po toj krivulji. Tim će se u (235) izmijeniti predznaci korijena. Budući da čitava funkcija (235) mora ostati ista, bit će razlika dobivenoga i prvotnog izraza jednaka nuli:

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ \bar{R}_{0,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\exp(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)+\exp(b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)}{\sqrt{s^2+1}} + \right.$$

$$+ \bar{R}_{1,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}+a_k+b_k\right)\left[\frac{2}{b_k}\exp(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{b_k}\exp(b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)\right]\right\} +$$

$$+ \bar{R}_{2,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{\exp(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)-\exp(b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)}{s^2+1} +$$

$$+ \bar{R}_{3,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left[-\frac{2s}{s^2+1}\exp(-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)+\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2s}{s^2+1}\exp(b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s)\right]\right\} \equiv 0. \qquad (236)$$

Ni ovdje slučaj $b_{k_1}=0$ ne daje bitnih teškoća. Prvi član pod sumom daje

$$\bar{R}_{0,k}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\frac{2\exp(-a_{k_1}s)}{\sqrt{s^2+1}},$$

drugi član daje

$$\bar{R}_{1,k_1}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s}+a_{k_1}\right)\left[-4\sqrt{s^2+1}\exp(-a_{k_1}s)\right]\right\},$$

a treći i četvrti član otpadaju.

Razmatrajmo kompleksne brojeve $-a_k+b_k$ i $-a_k-b_k$ ($k=1,\ldots,N$), pri čemu je moguće, da su neki od tih brojeva međusobno jednaki, a da nije povrijeđen uvjet stavka IV. 8, da ni u kojem paru jednadžbi (156) nisu zadovoljene obje jednadžbe. Ipak ćemo sve te brojeve in abstracto razlikovati. Ako međutim za jednu vrijednost k_1 indeksa k vrijedi (156a), ne ćemo razlikovati dotična dva broja $-a_{k_1}+b_{k_1}$ i $-a_{k_1}-b_{k_1}$, koja su oba jednaka $-a_{k_1}$, već ćemo taj broj uvrstiti samo među brojeve $-a_k+b_k$. U tom slučaju dakle razmatramo svega $2N-1$ takvih brojeva, dok ih je inače $2N$.

Neka je ϱ maksimum apsolutnih vrijednosti tih $2N$ odnosno $2N-1$ brojeva, t. j. polumjer najveće kružnice sa središtem u ishodištu, na kojoj leži bar jedna od točaka, koje odgovaraju tim brojevima. Odaberimo jednu od tih točaka na toj kružnici, pri čemu je moguće, da toj točki odgovara nekoliko međusobno jednakih brojeva. Neka su ti međusobno jednaki brojevi

$$-a_k+b_k \text{ za indekse } k=\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1}. \qquad (237)$$

$$-a_k-b_k \text{ „ „ } k=\beta_1,\ \beta_2,\ldots,\beta_{n_2}. \qquad (238)$$

Među indeksima pod (237) može pri tom biti sadržan indeks k_1. Zajednička vrijednost tih brojeva neka je $\varrho e^{i\varphi}$ ($-\pi<\varphi\leqq\pi$).

Da korijeni u (236) budu jednoznačni, ograničimo se na područje izvan kružnice s polumjerom $R=1$ i ustanovimo, da korijen $\sqrt{s^2+1}$ treba da bude pozitivan za realno pozitivno s. (Ta pretpostavka odgovara (173) i šutke je vrijedila već za (218).) Možemo tada korijen razviti u red potencija po $\frac{1}{s}$:

$$\sqrt{s^2+1}=s\sqrt{1+\frac{1}{s^2}}=s+\frac{1}{2s}-\frac{1}{8s^3}+\ldots \qquad (239)$$

Funkcija

$$\sqrt{s^2+1}-s=\frac{1}{2s}-\frac{1}{8s^3}+\ldots \qquad (240)$$

je dakle za $s=\infty$ regularna i jednaka nuli, i stoga funkcija

$$\exp\left[A\left(\sqrt{s^2+1}-s\right)\right]=\exp\left[A\left(\frac{1}{2s}-\frac{1}{8s^3}+\ldots\right)\right], \qquad (241)$$

gdje je A bilo kakav kompleksni broj, za $s=\infty$ regularna i jednaka jedan. Lako se uviđa, da (236) poslije izvršenih deriviranja dobiva oblik

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_k(s) \right\} \exp\left(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_k(s) \right\} \exp\left(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s\right) \equiv 0, \quad (242)$$

gdje su $U(s)$ i $V(s)$ izvjesne racionalne funkcije od s. Taj oblik vrijedi napose i za $k = k_1$ ($b_{k_1} = 0$), samo što će za taj indeks dio sa $U_{k_1}(s)$ otpasti, a dijelovi sa $V_{k_1}(s)$ će se zbrojiti.

Pomnožimo li (242) sa $\exp(-s\varrho e^{i\varphi})$, možemo pisati:

$$\sum_{k=1}^{N} \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_k(s) \right\} \exp\left[-b_k\left(\sqrt{s^2+1} - s\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\left(-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) s\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_k(s) \right\} \exp\left[b_k\left(\sqrt{s^2+1} - s\right)\right] \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\left(-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) s\right] \equiv 0. \quad (243)$$

Istražimo iz prve sume članove, za koje indeks k ima vrijednosti (238), a iz druge sume članove, kojima indeks ima vrijednosti (237). Među ovim posljednjima može biti član s indeksom $k = k_1$, za koji je $b_{k_1} = 0$. Za taj indeks vadimo dotične članove iz obiju suma, što zajedno daje

$$2\sqrt{s^2+1}\, V_{k_1}(s) \exp\left[\left(-a_{k_1} - \varrho e^{i\varphi}\right) s\right].$$

Sve ove izvađene članove skupimo u funkciju $G_1(s)$, dok sve ostale članove skupimo u funkciju $G_2(s)$. Onda je dakle

$$G_1(s) + G_2(s) \equiv 0 \quad (244)$$

ili

$$G_1(s) \equiv -G_2(s). \quad (245)$$

Uzmemo li sad u račun, da su eksponencijalne funkcije $\exp\left[\left(-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) s\right]$ i $\exp\left[\left(-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) s\right]$ u članovima od $G_1(s)$ sve jednake jedan, jer smo zajedničku vrijednost dotičnih brojeva $-a_k - b_k$ i $-a_k + b_k$ označili sa $\varrho e^{i\varphi}$, izlazi iz (239) i (241), da $G_1(s)$ za $s = \infty$ može imati samo nebitno singularno mjesto.

Za vrijednosti indeksa k, koje su sadržane u $G_2(s)$, vrijedi

$$-a_k + b_k = \varrho_k \exp(i\varphi_k) \qquad (-\pi < \varphi_k \leqq \pi), \quad (246)$$

$$-a_k - b_k = \sigma_k \exp(i\psi_k) \qquad (-\pi < \psi_k \leqq \pi), \quad (247)$$

pri čemu je sigurno

$$\varrho_k \leqq \varrho, \qquad \sigma_k \leqq \varrho, \quad (248)$$

jer je ϱ maksimum svih apsolutnih vrijednosti tih brojeva, a u slučaju

$$\varrho_k = \varrho \quad \text{odnosno} \quad \sigma_k = \varrho \quad (249)$$

sigurno je

$$\varphi_k \neq \varphi \quad \text{odnosno} \quad \psi_k \neq \varphi, \quad (250)$$

jer se ti brojevi razlikuju od $\varrho e^{i\varphi}$. Stavimo li sad u $G_2(s)$

$$s = \lambda e^{-i\varphi}, \quad (251)$$

gdje neka λ bude pozitivno (dakle realno), dobivamo za eksponente eksponencijalnih funkcija

$$\left(-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) \lambda e^{-i\varphi} = \lambda\left[\left(-a_k + b_k\right) e^{-i\varphi} - \varrho\right] =$$

$$= \lambda\left\{\varrho_k \exp\left[i\left(\varphi_k - \varphi\right)\right] - \varrho\right\} = \lambda\left[\varrho_k \cos\left(\varphi_k - \varphi\right) - \varrho + \right.$$

$$\left. + i\varrho_k \sin\left(\varphi_k - \varphi\right)\right] \quad (252)$$

i analogno

$$\left(-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi}\right) \lambda e^{-i\varphi} =$$

$$= \lambda\left[\sigma_k \cos\left(\psi_k - \varphi\right) - \varrho + i\sigma_k \sin\left(\psi_k - \varphi\right)\right]. \quad (253)$$

Realni dio tih eksponenata je u slučaju (249) negativan zbog (250), a pogotovu je negativan u slučaju znaka $<$ u (248). Ako je dakle μ minimum brojeva $\varrho - \varrho_k \cos\left(\varphi_k - \varphi\right)$ i $\varrho - \sigma_k \cos\left(\psi_k - \varphi\right)$ i ako je $0 < \varepsilon < \mu$, za $\lambda \to \infty$ $G_2(s)$ će sigurno jače težiti prema nuli nego $\exp\left[-(\mu - \varepsilon)\lambda\right]$, jer su eksponencijalne funkcije pomnožene funkcijom poput (241), (239) i racionalnim funkcijama $U_k(s)$ odnosno $V_k(s)$, a sve te funkcije ne mogu težiti jače prema ∞ nego konačna potencija. Ako dakle funkcija $G_2(s)$ sadržava barem jedan član, ima ona za $s = \infty$ sigurno bitno singularno mjesto, koliko ne iščezava identično. Budući da

lijeva strana identiteta (245) nema bitno singularno mjesto za $s = \infty$, mora desna strana, dakle i lijeva, identično iščezavati, t. j. vrijedi

$$G_1(s) \equiv 0. \tag{254}$$

Kad $G_2(s)$ uopće ne bi imao članova, vrijedila bi eo ipso relacija (254), no $G_2(s)$ ima za $N \geqq 2$ (a slučaj $N = 1$ smo već riješili) sigurno barem jedan član, jer bi inače s v i brojevi $-a_k - b_k$ i $-a_k + b_k$ bili sadržani među jednakim brojevima (237) i (238), što bi dovelo do protivrječja s pretpostavkom stavka IV. 8. s obzirom na jednadžbe (156). Kako smo vidjeli, u izrazu $G_1(s)$ može biti sadržan član s indeksom k_1. Ako je u $G_1(s)$ sadržan s a m o taj član sa k_1, za koji je $g_{k_1} = 0$, onda je

$$G_2(s) \equiv 0 \tag{255}$$

identitet, koji odgovara identitetu (236), samo što nema članova s indeksom k_1. Na temelju toga skraćenog identiteta, koji zbog $N \geqq 2$ sigurno nije bez članova, vršimo analogni postupak, koji smo izvršili sa (236) i dolazimo do neke nove funkcije $G_1(s)$, koja više ne sadržava član sa k_1 (ali sigurno nije bez članova, kako izlazi iz postupka, kojim se ta funkcija dobije).

Prema tome smo dakle svakako došli do neke funkcije $G_1(s)$, koja sigurno ne sadržava s a m o član s indeksom k_1. Prema načinu, kako su iz (243) odijeljeni članovi za $G_1(s)$, imat će (254) oblik

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_{\beta_k}(s) \right\} \exp\left(-b_{\beta_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_{\alpha_k}(s) \right\} \exp\left(b_{\alpha_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s\right) \equiv 0, \tag{256}$$

pri čemu smo faktor $\exp(-s\varrho e^{i\varphi})$ opet odbacili. Ukoliko je član s indeksom k_1 sadržan u tom identitetu, on glasi prema prije spomenutom

$$2\sqrt{s^2+1}\, V_{k_1}(s) \exp(-s_{k_1} s).$$

Prođe li s iznova zatvorenu krivulju, koja uključuje $+i$, a isključuje $-i$, promijenit će se predznaci korijena u (256), t. j. izlazi

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_{\beta_k}(s) \right\} \exp\left(b_{\beta_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s\right) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_{\alpha_k}(s) \right\} \exp\left(-b_{\alpha_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s\right) \equiv 0, \tag{257}$$

a član s indeksom k_1, ukoliko je sadržan, glasi

$$2\sqrt{s^2+1}\, V_{k_1}(s) \exp(-a_{k_1} s).$$

Razmatrajmo sad brojeve

$$-a_k - b_k \quad \text{za indekse} \quad k = \alpha_1, \ldots, \alpha_{n_1}, \tag{258}$$

$$-a_k + b_k \quad \text{„} \quad \text{..} \quad k = \beta_1, \ldots, \beta_{n_2}, \tag{259}$$

koje dobijemo iz (237) i (238) promjenom predznaka brojeva b_k. Budući da su brojevi (237) i (238) međusobno jednaki, brojevi su (258), (259) svi međusobno različiti. Da su dva broja (258) jednaka, t. j.

$$-a_j - b_j = -a_k - b_k, \tag{260}$$

a uz to otprije

$$-a_j + b_j = -a_k + b_k, \tag{261}$$

izlazilo bi

$$a_j = a_k, \quad b_j = b_k \tag{262}$$

u protivrječju s pretpostavkom stavka IV. 8. Analogno vrijedi za slučaj, da su dva broja (259) jednaka. Da je jedan broj (258) jednak jednom broju (259), bilo bi

$$-a_\alpha - b_\alpha = -a_\beta + b_\beta, \tag{263}$$

a otprije

$$-a_\alpha + b_\alpha = -a_\beta - b_\beta, \tag{264}$$

pa bi bilo

$$a_\alpha = a_\beta \text{ i } b_\alpha = -b_\beta, \text{ dakle } b_\alpha^2 = b_\beta^2 \tag{265}$$

u protivrječju s pretpostavkom stavka IV. 8. Ovdje se vidi, zašto su u (156) brojevi b_k u kvadratu. Na ovo pitanje ćemo se još kasnije osvrnuti.

Ako je $\bar{\varrho}$ maksimum apsolutnih vrijednosti brojeva (258), (259), pa je $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ jedan od brojeva, koji imaju tu apsolutnu vrijednost, možemo (257) pomnožiti sa $\exp(-s\,\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}})$ i dobivamo analogon relacije (243):

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_{\beta_k}(s) \right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[b_{\beta_k}\left(\sqrt{s^2+1} - s\right)\right] \exp\left[\left(-a_{\beta_k} + b_{\beta_k} - \bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}\right) s\right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_{\alpha_k}(s) \right\} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[-b_{\alpha_k}\left(\sqrt{s^2+1} - s\right)\right] \exp\left[\left(-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k} - \bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}\right) s\right] \equiv 0 . \quad (266)$$

(Eventualni član indeksa k_1 dakako glasi

$$-2\sqrt{s^2+1}\, V_{k_1}(s) \exp\left[\left(-a_{k_1} - \bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}\right) s\right] .)$$

Ako se broj $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ nalazi među brojevima $-a_{\beta_k} + b_{\beta_k}$, izvadit ćemo član s indeksom β_k i nazvati ga $\bar{G}_1(s)$, dok ostatak izraza (266) nazivamo $\bar{G}_2(s)$. Ako je naprotiv broj $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ sadržan među brojevima $-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k}$, neka je $\bar{G}_1(s)$ član s indeksom α_k, a ostatak izraza neka je $\bar{G}_2(s)$. Analognim razmatranjem kao prije dobivamo

$$\bar{G}_1(s) \equiv 0 . \quad (267)$$

Ako je $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ bio broj s indeksom k_1, t. j. $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}} = -a_{k_1}$, daje nam

$$\bar{G}_2(s) \equiv 0 \quad (268)$$

identitet, koji se podudara sa (257), samo što nema člana s indeksom k_1. Ponovimo li razmatranje, dolazimo svakako do neke funkcije $\bar{G}_1(s)$, koja ne sadržava toga člana, t. j. ima oblik

$$\left\{ U_\alpha(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_\alpha(s) \right\} \exp\left(-b_\alpha \sqrt{s^2+1} - a_\alpha s\right) \equiv 0 , \quad (269)$$

ako je $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ među brojevima (258) odnosno

$$\left\{ U_\beta(s) - \sqrt{s^2+2}\, V_\beta(s) \right\} \exp\left(b_\beta \sqrt{s^2+1} - a_\beta s\right) \equiv 0 , \quad (270)$$

ako je $\bar{\varrho}\, e^{i\bar{\varphi}}$ među brojevima (259). Prođe li s zatvorenu krivulju, koja uključuje $+i$, a isključuje $-i$, možemo u (270) promijeniti predznake korijena, tako da i tu dobijemo oblik (269).

Isporedi li se (243) sa (236), vidi se, da identitet (269), koji sadržava samo članove, u kojima je u eksponentu eksponencijalne funkcije negativni predznak pred b_k, mora glasiti

$$\bar{R}_{0,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\exp\left(-b_\alpha \sqrt{s^2+1} - a_\alpha s\right)}{\sqrt{s^2+1}} +$$

$$+ \bar{R}_{1,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} + a_\alpha + b_\alpha\right)\left[\frac{2}{b_\alpha} \exp\left(-b_\alpha \sqrt{s^2+1} - a_\alpha s\right)\right]\right\} +$$

$$+ \bar{R}_{2,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{\exp\left(-b_\alpha \sqrt{s^2+1} - a_\alpha s\right)}{s^2+1} +$$

$$+ \bar{R}_{3,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left\{-\frac{2s}{s^2+1} \exp\left(-b_\alpha \sqrt{s^2+1} - a_\alpha s\right)\right\} \equiv 0 . \quad (271)$$

S obzirom na (221), (225), (227), (230) i na relaciju

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}\, t^r\, dt = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{\exp\left[-(a+b)s\right]}{s} \quad (272)$$

može se mjesto (271) pisati

$$\int_{a_\alpha + b_\beta}^{\infty} e^{-st} \left\{ \bar{R}_{0,\alpha}(t)\, \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - b_\alpha^2}\right) + \right.$$

$$+ \bar{R}_{1,\alpha}(t)\,(t - a_\alpha - b_\alpha)\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - b_\alpha^2}\right) +$$

$$+ \bar{R}_{2,\alpha}(t) \int_{b_\alpha}^{t-a_\alpha} \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - y^2}\right) dy +$$

$$\left. + \bar{R}_{3,\alpha}(t)\,(t-a_\alpha) \int_{b_\alpha}^{t-a_\alpha} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - y^2}\right) dy - 2\bar{R}_{3,\alpha}(t) \right\} dt \equiv 0 . \quad (273)$$

Stavimo li

$$t = \bar{t} + a_\alpha + b_\alpha, \tag{274}$$

postaje donja granica vanjskog integrala nula, a ako prikladno pomaknemo put integracije, gornja granica je opet $+\infty$. Time je integracija protegnuta uzduž realne osi, pa možemo upotrebiti stavak o uzajamnoj jednoznačnosti preslikavanja, koje daje Laplaceova transformacija[15]. Time je izraz u zagradi, u koji naknadno opet uvodimo t prema (274), identično jednak nuli. To je onda relacija poput (160), tako da vrijedi

$$\overline{R}_{0,\alpha}(t) \equiv \overline{R}_{1,\alpha}(t) \equiv \overline{R}_{2,\alpha}(t) \equiv \overline{R}_{3,\alpha}(t) \equiv 0 \tag{275}$$

i s obzirom na (212) do (216),

$$R_{0,\alpha}(t) \equiv R_{1,\alpha}(t) \equiv R_{2,\alpha}(t) \equiv R_{3,\alpha}(t) \equiv 0\,. \tag{276}$$

Time smo u prvom identitetu (157) snizili N za jednu jedinicu. Ponavljanjem toga postupka može se sniziti N na jedan. Koliko postoji indeks k_1, za koji je $b_{k_1} = 0$, dotični će članovi ostati u tom posljednjem identitetu, u kojem je $N = 1$. Budući da smo za taj slučaj već izveli dokaz, koji ne ovisi o tom, da li je $b = 0$, time je sve dokazano.

Izvršit ćemo još diskusiju nekih slučajeva, gdje nisu zadovoljeni svi uvjeti stavka IV. 8. Ako nije zadovoljen uvjet, da (156a) vrijedi za najviše jednu vrijednost k_1 indeksa k, već ako je za barem dva indeksa k_1 i k_2

$$b_{k_1} = b_{k_2} = 0\,, \tag{277}$$

lako se vidi, da postoji identitet poput (157). Prema (168) izlazi naime

$$\mathrm{I}_1 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} A_0\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \int_0^{t-a_{k_1}} A_0\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}\right) dy = \sin(t-a_{k_1})\,, \tag{278}$$

[15] Doetsch, 3. pogl. § 7.

$$\mathrm{I}_2 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} A_0\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \int_0^{t-a_{k_2}} A_0\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}\right) dy = \sin(t-a_{k_2})\,, \tag{279}$$

a prema (169)

$$\mathrm{I}_3 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} A_1\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}\right) dy = \int_0^{t-a_{k_1}} A_1\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{t-a_{k_1}}\left[1 - \cos(t-a_{k_1})\right], \tag{280}$$

$$\mathrm{I}_4 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} A_1\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}\right) dy = \int_0^{t-a_{k_2}} A_1\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{t-a_{k_2}}\left[1 - \cos(t-a_{k_2})\right]. \tag{281}$$

Ako u izrazu

$$\sin(t-a_{k_1}-a_{k_2}) = \cos a_{k_2} \sin(t-a_{k_1}) - \sin a_{k_2} \cos(t-a_{k_1}) =$$

$$= \cos a_{k_1} \sin(t-a_{k_2}) - \sin a_{k_1} \cos(t-a_{k_2}) \tag{282}$$

nadomjestimo $\sin(t-a_{k_1})$, $\sin(t-a_{k_2})$, $\cos(t-a_{k_1})$, $\cos(t-a_{k_2})$ vrijednostima prema (278), (279), (280), (281), dobijemo identitet

$$\cos a_{k_2}\,\mathrm{I}_1 - \cos a_{k_1}\,\mathrm{I}_2 + \frac{1}{2}(t-a_{k_1}) \sin a_{k_2}\,\mathrm{I}_3 -$$

$$- \frac{1}{2}(t-a_{k_2}) \sin a_{k_1}\,\mathrm{I}_4 + \sin a_{k_1} - \sin a_{k_2} \equiv 0\,, \tag{283}$$

koji potpada pod oblik (157).

Ovdje istina treba primijetiti, da su koeficijenti u kanonskom obliku integralnih teorema bile racionalne funkcije ne samo s obzirom na varijablu t, već i s obzirom na parametre $x_1, \ldots, x_r$. Kad bismo za parametre a_k uvrstili izraze (149), u identitetu (283) bili bi koeficijenti doduše racionalne funkcije

varijable t, ali transcendentne funkcije parametara $x_1, \ldots, x_r$. Iz toga se vidi, da bi zahtjev, da koeficijenti ovise racionalno o parametrima, vjerojatno omogućio slabije uvjete s obzirom na te parametre u stavku IV. 8. U ovo pitanje međutim ne ulazimo.

Pretpostavimo dalje, da u drugoj jednadžbi (156) nisu napisani kvadrati, već prve potencije parametara b_k. To dakle znači, da na pr. za neko k može biti $a_j = a_k$ (284), $b_j = -b_k \neq 0$ (285). Funkcije za indekse j i k podudaraju se u prvoj sumi od (157), a isto tako i u drugoj sumi. Takvi se članovi dakle mogu zbrojiti. U trećoj i četvrtoj sumi također će se neki članovi moći zbrojiti, kako ćemo još vidjeti. (Pri tom još pridolaze neke trigonometrijske funkcije.) Pita se, nisu li poslije toga zbrajanja koeficijenti opet jednoznačno određeni. Neka najprije postoje barem dva para indeksa j_1, k_1 i j_2, k_2, za koje vrijedi (284) i (285). Supstitucija $y = -\bar{y}$ (286) daje

$$\int_0^b \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = -\int_0^{-b} \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-\bar{y}^2}\right) d\bar{y}, \tag{287}$$

dakle s obzirom na (168)

$$\int_{-b}^{t} \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sin t - \int_0^{-b} \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy =$$

$$= \sin t + \int_0^b \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \sin t +$$

$$+ \sin t - \int_b^t \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy \tag{288}$$

ili

$$\int_b^t \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy + \int_{-b}^t \Lambda_0 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = 2 \sin t. \tag{289}$$

Slično se dobiva

$$\int_b^t \Lambda_1 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy + \int_{-b}^t \Lambda_1 \left(\sqrt{t^2-y^2}\right) dy = \frac{4}{t}(1-\cos t). \tag{290}$$

Prema tome će biti

$$A \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0 \left(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}\right) dy + A \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0 \left(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ B \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0 \left(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}\right) dy + B \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0 \left(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ C(t-a_{j_1}) \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1 \left(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ C(t-a_{j_1}) \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1 \left(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ D(t-a_{j_2}) \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1 \left(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}\right) dy +$$

$$+ D(t-a_{j_2}) \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1 \left(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}\right) dy -$$

$$-4C-4D = 2A \sin(t-a_{j_1}) + 2B \sin(t-a_{j_2}) -$$

$$- 4D \cos(t-a_{j_1}) - 4D \cos(t-a_{j_2}). \tag{291}$$

Stavimo li

$$A = -2 \operatorname{ctg}(a_{j_1}-a_{j_2}); B = \frac{2}{\sin(a_{j_1}-a_{j_2})}; C = 1; D = 0, \tag{292}$$

desna strana izraza (291), u kojoj su stegnuti dotični članovi treće i četvrte sume prema (157), identično iščezava, kako se može lako izračunati. U tom slučaju dakle postoji identitet oblika (156). I ovdje su koeficijenti racionalne funkcije varijable t, ali djelomice transcendentne funkcije parametara. Postoji li samo jedan par indeksa j, k, za koji vrijedi (284), (285), a nema indeksa, za koji bi vrijedila jednadžba (156a), dokaz jednoznačnosti se može ipak izvesti, ako se stegnu članovi, koji odgovaraju u (157) tim indeksima.

Na temelju (284), (285) vrijedi

$$R_{0,j}(t)\,\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right)+R_{0,k}(t)\,\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right)=$$
$$=\left[R_{0,j}(t)+R_{0,k}(t)\right]\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right), \qquad (293)$$

$$R_{1,j}(t)\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right)+R_{1,k}(t)\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right)=$$
$$=\left[R_{1,j}(t)+R_{1,k}(t)\right]\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right). \qquad (294)$$

Dalje je s obzirom na (288) i (166), (167)

$$\int_{-b_j}^{t-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy=-\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+2\sin(t-a_j)=$$
$$=-\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+2\int_0^{-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy, \qquad (295)$$

$$\int_{-b_j}^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy=-\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+\frac{4}{t-a_j}\left[1-\right.$$
$$\left.-\cos(t-a_j)\right]=-\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+2\int_0^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy. \qquad (296)$$

Mogu se dakle prema (293) do (296) članovi identiteta s indeksima j i k dovesti u oblik

$$\left[R_{0,j}(t)+R_{0,k}(t)\right]\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right)+\left[R_{1,j}(t)+R_{1,k}(t)\right]\cdot$$
$$\cdot\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right)+\left[R_{2,j}(t)-R_{2,k}(t)\right]\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+$$
$$+2R_{2,k}(t)\int_0^{t-a_j}\Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+\left[R_{3,j}(t)-R_{3,k}(t)\right]\cdot$$
$$\cdot\int_{b_j}^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy+2R_{3,k}(t)\int_0^{t-a_j}\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy. \qquad (297)$$

Uvedemo li mjesto članova s indeksima j i k članove s novim indeksima p, q s vrijednostima

$$a_p=a_j, \qquad b_p=b_j, \qquad (298),\ (299)$$
$$R_{0,p}(t)=R_{0,j}(t)+R_{0,k}(t), \qquad (300)$$
$$R_{1,p}(t)=R_{1,j}(t)+R_{1,k}(t), \qquad (301)$$
$$R_{2,p}(t)=R_{2,j}(t)-R_{2,k}(t), \qquad (302)$$
$$R_{3,p}(t)=R_{3,j}(t)-R_{3,k}(t), \qquad (303)$$

$$a_q=a_j, \qquad b_q=0, \qquad (304),\ (305)$$
$$R_{0,q}(t)=R_{1,q}(t)=0, \qquad (306)$$
$$R_{2,q}(t)=2R_{2,j}(t), \qquad (307)$$
$$R_{3,q}(t)=2R_{3,j}(t), \qquad (308)$$

dobivamo upravo izraz (297). Vrijednost b_q je dopustiva, jer smo pretpostavili, da nijedan od ostalih b_k nije jednak nuli. Stavak IV. 8. je dakle primjenljiv, i identitet je nemoguć.

Time je diskusija osobitih slučajeva izvršena.

9. Formule rekurzije za kompozicije, ako pojedini parametri iščezavaju

Jednadžbe rekurzije (87), (88), (92), (93), (94) nisu primjenljive, kad je dotični parametar jednak nuli. Za taj ćemo slučaj izvesti druge jednadžbe rekurzije. Stavimo u (82) $x_2=0$ i upotrebimo III (6):

$$K_{n_1,\,n_2+2}^{m_1,\,m_2+2}(t;x_1,0)=\int_{x_1}^{t}y^{m_1}(t-y)^{m_2+2}\,\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{y^2-x_1^2}\right)\Lambda_{n_2+2}\left[c(t-y)\right]dy=$$
$$=\frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2}\int_{x_1}^{t}y^{m_1}(t-y)^{m_2}\,\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{y^2-x_1^2}\right)\Big\{\Lambda_{n_2+1}\left[c(t-y)\right]-$$
$$-\Lambda_{n_2}\left[c(t-y)\right]\Big\}dy=\frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2}\left[K_{n_1,\,n_2+1}^{m_1,\,m_2}(t;x_1,0)-\right.$$
$$\left.-K_{n_1,\,n_2}^{m_1,\,m_2}(t;x_1,0)\right]. \qquad (309)$$

Nadomjestimo li u (89) n_2 sa n_2+1 i m_2 sa m_2+1, stavimo $x_2=0$ i uvrstimo izraz (309), izlazi

$$\frac{\partial K^{m_1,\,m_2+1}_{n_1,\,n_2+1}(t;x_1,0)}{\partial t} = (m_2-2n_2-1)\,K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2+1}(t;x_1,0) + \\ + 2(n_2+1)\,K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0). \tag{310}$$

Pretpostavimo li $m_2>0$, deriviramo (90) (u kojem je stavljeno $x_2=0$) po t i uvrstimo izraz (310), dobivamo

$$K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2+1}(t;x_1,0) = \frac{2(n_2+1)}{2n_2-m_2+1}\left\{K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) - \right. \\ \left. - \frac{m_2}{c^2}\frac{\partial K^{m_1,\,m_2-1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t^2}\right\} \\ (2n_2-m_2+1\neq 0,\ m_2>0). \tag{311}$$

Ako je naprotiv $m_2=0$, u (90) prvi član u vitičastoj zagradi ne iščezava, kada stavljamo $x_2=0$, ali iščezava drugi član. Dobivamo za taj slučaj

$$K^{m_1,\,0}_{n_1,\,n_2+1}(t;x_1,0) = \frac{2(n_2+1)}{2n_2+1}\left\{K^{m_1,\,0}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{m_1}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right)\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 K^{m_1,\,0}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t^2}\right\}. \tag{312}$$

Formule (311), (312) dopuštaju postepeno povisivanje donjega indeksa, kojemu odgovara parametar stavljen jednako nuli, uz pretpostavku, da je $m_2\neq 2n_2+1$. Uz lihi m_2 može se dakle povisivanje od n_2 provesti od 0 do $\frac{m_2-1}{2}$ i od $\frac{m_2+1}{2}$ na više, dok za tâki m_2 povisivanju od n_2 nema zapreka.

Pretpostavimo sada $m_2>0$ i nadomjestimo u (311) m_2 sa m_2+1. Poređenje sa (90), gdje zbog $x_2=0$ prvi član u zagradi otpada, daje

$$c^2 K^{m_1,\,m_2+1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{m_1,\,m_2+1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) = \\ = (2n_2-m_2)\,m_2\,K^{m_1,\,m_2+1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) - (2n_2-2m_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,\,m_2}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) \\ (m_2>0) \tag{313}$$

Stavimo li u (311) $m_2=1$, $x_2=0$ i isporedimo sa (90), gdje stavljamo $m_2=0$, tako da otpada drugi član u zagradi, dok prvi član ne otpada, izlazi

$$c^2 K^{m_1,\,1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{m_1,\,1}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0) = \\ = 2n_2\,t^{m_1}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right) - (2n_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,\,0}_{n_1,\,n_2}(t;x_1,0). \tag{314}$$

Jednadžbe (313) i (314) imaju oblik

$$c^2 f(t) + f''(t) = \varphi(t), \tag{315}$$

pri čemu je za slučaj (313)

$$f(x_1)=0,\quad f'(x_1)=0, \tag{316}$$

a za slučaj (314)

$$f(x_1)=0,\quad f'(x_1)=x_1^{m_1}, \tag{317}$$

kako izlazi iz definicije (82) i iz jednadžbe (89), koja vrijedi i za $m_2=0$, pri čemu otpada drugi član na desnoj strani. Opće rješenje jednadžbe (315) može se varijacijom konstanata dobiti u obliku

$$f(t) = \frac{e^{ict}}{2ic}\left\{C_1 + \int_0^t e^{-icy}\varphi(y)\,dy\right\} + \frac{e^{-ict}}{-2ic}\left\{C_2 + \int_0^t e^{icy}\varphi(y)\,dy\right\}. \tag{318}$$

Odredimo li konstante C_1 i C_2 pomoću (316), dobivamo

$$f(t) = \frac{1}{2ic}\left\{e^{ict}\int_{x_1}^t e^{-icy}\varphi(y) - e^{-ict}\int_{x_1}^t e^{icy}\varphi(y)\,dy\right\} = \\ = \frac{1}{c}\int_{x_1}^t \varphi(y)\sin\left[c(t-y)\right]dy. \tag{319}$$

Odredimo li te konstante pomoću (317), izlazi

$$f(t) = \frac{1}{2ic}\left\{e^{ic(t-x_1)}x_1^{m_1} + e^{ict}\int_{x_1}^t e^{-icy}\varphi(y)\,dy - e^{-ic(t-x_1)}x_1^{m_1} -\right.$$

$$- e^{-ict} \int_{x_1}^{t} e^{ict}\, \varphi(y)\, dy \Big\} = \frac{1}{c} \Big\{ x_1^{m_1} \sin[c(t-x_1)] + \int_{x_1}^{t} \varphi(y) \sin[c(t-y)]\, dy \Big\}. \quad (320)$$

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (313) jednadžba (319) glasi

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t; x_1, 0) = \frac{(2n_2 - m_2)\, m_2}{c} \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2-1}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy -$$

$$- \frac{2n_2 - 2m_2 - 1}{c} \int_{x_1}^{t} \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy \quad (m_2 > 0). \quad (321)$$

Parcijalna integracija daje

$$\int_{x_1}^{t} \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy =$$

$$= \Big\{ K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] \Big\}_{y=x_1}^{y=t} +$$

$$+ c \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)]\, dy =$$

$$= c \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)]\, dy. \quad (322)$$

No budući da je

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy =$$

$$= c \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)]\, dy, \quad (323)$$

izlazi

$$\int_{x_1}^{t} \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy. \quad (324)$$

Stavimo li kao u (83)

$$F_1(t) = \begin{cases} t^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2 - x_1^2}\right) & \text{za } t > x_1 \\ 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_1 \end{cases}, \quad (325)$$

a kao specijalne slučajeve od (84) i (62) odnosno (63)

$$F_2(t) = t^{m_2} \Lambda_{n_2}(ct) \qquad (t \geqq 0), \quad (326)$$

$$F_3(t) = \Lambda_0(ct) \qquad (t \geqq 0), \quad (327)$$

onda je prema (82) i I (33)

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t; x_1, 0) = F_1(t) * F_2(t) \quad (t > x_1), \quad (328)$$

a prema (64), (69), (166)

$$\frac{1}{c} \sin(ct) = F_3(t) * F_3(t) \qquad (t \geqq 0). \quad (329)$$

Prema tome je očito za $t > x_1$

$$\frac{1}{c} \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy = F_1(t) * F_2(t) * F_3(t) =$$

$$= K_{n_1,n_2,0,0}^{m_1,m_2,0,0}(t; x_1, 0, 0, 0), \quad (330)$$

a analitičkim produživanjem se uviđa, da je i za bilo koji kompleksni x_1, t

$$\frac{1}{c} \int_{x_1}^{t} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)]\, dy = K_{n_1,n_2,0,0}^{m_1,m_2,0,0}(t; x_1, 0, 0, 0). \quad (331)$$

Jednadžba (321) može se dakle pisati u obliku

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t; x_1, 0) = m_2(2n_2 - m_2)\, K_{n_1,n_2,0,0}^{m_1,m_2-1,0,0}(t; x_1, 0, 0, 0) -$$

$$- (2n_2 - 2m_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1,n_2,0,0}^{m_1,m_2,0,0}(t; x_1, 0, 0, 0) \quad (m_2 > 0). \quad (332)$$

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (314) u jednadžbu (320) izlazi

$$K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = \frac{1}{c}x_1^{m_1}\sin[c(t-x_1)] +$$

$$+\frac{2n_2}{c}\int_{x_1}^{t} y^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{y^2-x_1^2}\right)\sin[c(t-y)]\,dy -$$

$$-\frac{2n_2-1}{c}\int_{x_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}K^{m_1,0}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\sin[c(t-y)]\,dy. \qquad (333)$$

Analognim se zaključivanjem uviđa, da se ta jednadžba može dovesti u oblik

$$K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = x_1^{m_1}K^{0,0}_{0,0}(t-x_1;0,0) + 2n_2 K^{m_1,0,0}_{n_1,0,0}(t;x_1,0,0) -$$

$$-(2n_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,0,0,0}_{n_1,n_2,0,0}(t;x_1,0,0,0). \qquad (334)$$

Za kompozicije sa više od dva para indeksa dobiva se mjesto (309) sasvim analognim načinom

$$K^{m_1+2,m_2,\ldots,m_r}_{n_1+2,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$=\frac{4(n_1+1)(n_1+2)}{c^2}K^{m_1,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,\ n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$-K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r), \qquad (335)$$

gdje je samo radi jednostavnosti prvi parametar stavljen jednak nuli umjesto drugog. Nadomjestimo li u (111) m_1 sa m_1+1 i n_1 sa n_1+1, stavimo $x_1=0$ i uvrstimo zatim izraz (335), izlazi

$$\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1+1,m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$=2(n_1+1)\,K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$-(2n_1-m_1+1)\,K^{m_1,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r). \qquad (336)$$

Neka je sada $m_1>0$. Deriviramo li (111), u kojemu je stavljeno $x_1=0$, po t i uvrstimo (336), izlazi

$$K^{m_1,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$=\frac{2(n_1+1)}{2n_1-m_1+1}\left\{K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -\right.$$

$$-\frac{m_1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1-1,\,m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\ \ n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) +$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r)\right\}$$

$$(2n_1-m_1+1\neq 0,\quad m_1>0). \qquad (337)$$

Ako je $m_1=0$, onda za $x_1=0$ u (111) ne otpada prvi član desne strane, ali otpada drugi član. U tom slučaju se dobiva:

$$K^{0,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$=\frac{2(n_1+1)}{2n_1+1}\left\{K^{0,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -\right.$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}K^{m_2,\ldots,m_r}_{n_2,\ldots,n_r}(t;x_2,\ldots,x_r) +$$

$$\left.+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{0,\ m_2,\ldots,m_r}_{n_1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r)\right\}. \qquad (338)$$

Formule (337), (338) dopuštaju povisivanje donjega indeksa za ove kompozicije pod analognim uvjetima kao formule (311), (312) za kompozicije sa dva para indeksa.

Za povisivanje gornjega indeksa postupamo sasvim analogno kao u slučaju kompozicija sa dva para indeksa. Polazeći od formule (111) umjesto (89) odnosno (90), i od (337) umjesto (311), dobivamo analogno prema (313), (314):

$$\left(c^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)K^{m_1+1,\,m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\ \ n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$=(2n_1-m_1)\,m_1\,K^{m_1-1,\,m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\ \ n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$-(2n_1-2m_1-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r)\ (m_1>0), \qquad (339)$$

$$\left(c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) K^{1,\, m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\, n_2,\ldots,n_r}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r) =$$

$$= 2n_1 K^{m_2,\ldots,m_r}_{n_2,\ldots,n_r}(t;\, x_2,\ldots,x_r) -$$

$$-(2n_1-1)\, K^{0,\, m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\, n_2,\ldots,n_r}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r)\,. \qquad (340)$$

Jednadžba (315) vrijedi i ovdje. Mjesto (316), (317) dobivamo za $m_1 > 0$ i za $m_1 = 0$

$$f(x_2 + \ldots + x_r) = 0, \quad f'(x_2 + \ldots + x_r) = 0\,, \qquad (341)$$

kako se razabira iz (107) i (111). Sasvim analogni zaključci kao kod kompozicija sa dva para indeksa dovode konačno do jednadžbi

$$K^{m_1+1,\, m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\quad n_2,\ldots,n_r}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r) =$$

$$= m_1(2n_1-m_1)\, K^{m_1-1,\, m_2,\ldots,m_r,\,0\,0}_{n_1,\quad n_2,\ldots,n_r,\,0,\,0}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r,0,0) -$$

$$-(2n_1-2m_1-1)\,\frac{\partial}{\partial t}\, K^{m_1,\ldots,m_r,\,0,\,0}_{n_1,\ldots,n_r,\,0,\,0}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r,0,0)$$

$$(m_1 > 0). \qquad (342)$$

i

$$K^{1,\, m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\, n_2,\ldots,n_r}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r) =$$

$$= 2n_1 K^{m_2,\ldots,m_r,\,0\,0}_{n_2,\ldots,n_r,\,0,\,0}(t;\, x_2,\ldots,x_r,0,0) -$$

$$-(2n_1-1)\, K^{0,\, m_2,\ldots,m_r,\,0\,0}_{n_1,\, n_2,\ldots,n_r,\,0\,0}(t;\, 0, x_2,\ldots,x_r,0,0)\,. \qquad (343)$$

Formule (311), (312), (332), (334), (337), (338), (342), (343) omogućuju postepeno povisivanje indeksa, za koje je pripadni parametar stavljen jednak nuli. Formule su izvedene za slučaj, da je to prvi par indeksa, ali vrijede, dakako, analogno, i kad je to bilo koji par indeksa. Polazna je točka kod toga povisivanja formula (81), koja daje kompozicije s bilo koliko indeksa, ako su ti indeksi jednaki nuli. Povisivanje donjih indeksa svih potrebnih kompozicija vrši se onda na temelju formula (87), III (5), ako se pripadni parametar razlikuje od nule, a pomoću (311), (312), (337), (338); ako je jednak nuli (pri čemu nema teškoća, jer gornji indeks nije lih, nego jednak nuli).

Zatim se vrši povisivanje gornjih indeksa pomoću (93), (112), ako se pripadni parametar razlikuje od nule, a pomoću (332), (334), (342), (343), ako je jednak nuli. Razabira se, da je postupak, ako je koji parametar jednak nuli, dosta opsežan, pa će zato biti prikladnija metoda graničnog prijelaza, koju ćemo raspraviti u idućoj točki.

10. Granični prijelaz u izravnim formulama za kompozicije, kad pojedini parametri x_1, x_2, ... konvergiraju prema nuli

Želimo li u općim formulama (140), (141) neke od parametara $x_1, \ldots, x_r$ staviti jednako nuli, nailazimo na teškoće, jer operator $D_{x_k} = \frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}$ u tom slučaju gubi smisao. Očito lijeva strana u tim formulama prema definiciji (107) ne pruža nikakve teškoće u tom pogledu, pa je vrijednost te lijeve strane, kada se neki parametri stave jednako nuli, jednoznačno određena i jednaka limesu, koji dobivamo, ako ti parametri istodobno na bilo koji način ili svaki za sebe u bilo kojem poređaju konvergiraju prema nuli. Taj granični prijelaz mora dakle biti primjenljiv i na desnu stranu kao cjelinu, ali ne mora biti primjenljiv na svaki sumand desne strane. Tu ćemo se poslužiti stavkom II. 7, koji je primjenljiv, jer svi sumandi desne strane imaju derivacije bilo kojega reda i za $x_k = 0$, ako ih prethodno pomnožimo dovoljno visokom potencijom dotičnoga parametra x_k, koji treba konvergirati prema nuli.

Prema II (270), a s obzirom na formule II (132) i II (133) vidi se, da je rezultat postupka taj, da treba operatorsku potenciju $D^s_{x_k} = \left(\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^s$ nadomjestiti sa $\frac{2^s\, s!}{(2s)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{2s}$, ako djeluje na neku funkciju $f(x_k)$, a sa $\frac{2^s\, s!}{(2s+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{2s+1}$, ako djeluje na funkciju oblika $\frac{1}{x_k}\varphi(x_k)$, i poslije tih deriviranja funkcijâ $f(x_k)$ odnosno $\varphi(x_k)$ staviti $x_k = 0$. Slučaj, da je funkcija oblika $\frac{1}{x_k}\varphi(x_k)$, nastaje u (140) odnosno (141), kada je $m_{k_\varepsilon} = 0$, jer je onda dotični faktor u uglastoj zagradi $x_{k_\varepsilon}^{-1}$.

Time bi problem graničnog prijelaza u načelu bio riješen, no mi ćemo još raspraviti neka pojednostavnjenja, koja se mogu učiniti. Zamislimo na primjer, da se u srednjem članu vitičaste

zagrade na desnoj strani od (141) treba neki određeni x_{k_ε} staviti jednako nuli. Označimo uglastu zagradu u tom srednjem članu sa $\frac{1}{x_{k_\varepsilon}}\,\varphi(t, x_{k_\varepsilon})$ i stavimo

$$\varphi(t, x_{k_\varepsilon}) = x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}}\,\psi(t, x_{k_\varepsilon}). \tag{344}$$

Prema prije rečenom imat ćemo nadomjestiti

$$D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\,\frac{1}{x_{k_\varepsilon}}\,\varphi(t, x_{k_\varepsilon}) \tag{345}$$

sa

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t, x_{k_\varepsilon})\right\}_{x_{k_\varepsilon}=0}. \tag{346}$$

Prema (344) vrijedi

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t, x_{k_\varepsilon}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\binom{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}{s}\frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon}-s)!}\,x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-s}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1-s}\cdot$$

$$\cdot\,\psi(t, x_{k_\varepsilon}), \tag{347}$$

ako je

$$m_{k_\varepsilon} > 2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1 \tag{348}$$

i

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t, x_{k_\varepsilon}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_{k_\varepsilon}}\binom{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}{s}\frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon}-s)!}\,x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-s}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1-s}\psi(t, x_{k_\varepsilon}), \tag{349}$$

ako je

$$m_{k_\varepsilon} \leq 2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1. \tag{350}$$

Stavimo li sada $x_{k_\varepsilon}=0$, onda u slučaju (348) iščezne desna strana od (347), dok u slučaju (350) dobivamo

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t, x_{k_\varepsilon})\right\}_{x_{k_\varepsilon}=0} =$$

$$= \frac{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1}\psi(t, x_{k_\varepsilon})\right\}_{x_{k_\varepsilon}=0}. \tag{351}$$

Prema tome treba izraz (345) u slučaju (348) nadomjestiti nulom, a u slučaju (350), s obzirom na (346), sa

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1}\psi(t, x_{k_\varepsilon})\right\}_{x_{k_\varepsilon}=0}. \tag{352}$$

Budući da $\psi(t, x_{k_\varepsilon})$ ovisi o varijablama t i x_{k_ε} očito samo u obliku linearnoga izraza $t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma}$, gdje se x_{k_ε} nalazi među varijablama $x_{k_1},\ldots,x_{k_\gamma}$, može se diferencijacija $\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}$ nadomjestiti diferencijacijom $\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)$, tako da mjesto (352) možemo pisati

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-w_{k_\varepsilon}-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1}\psi(t, 0). \tag{353}$$

Konačni je dakle efekt, da se u slučaju (348) dotični član u (141) odbaci, dok se u slučaju (350) ispušta dotični $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}$, a mjesto dotičnoga operatora

$$D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1} \tag{354}$$

piše se

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1} \tag{355}$$

i konačno se stavlja $x_{k_\varepsilon} = 0$, što se može učiniti i prije deriviranja po t. Razumije se, da se diferencijacija po t, sadržana u (355), može sažeti s diferencijacijom

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\varphi=1}^{r}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)}$$

koja se nalazi u (141).

Uzmimo sada, da treba neki određeni broj parametara x_{s_δ} ($\delta = 1, 2, \ldots, H$; $1 \leqq H \leqq r-\gamma$) u (141) staviti jednako nuli. Pretpostavimo, da uz odabrane v_δ vrijedi

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \geqq 0 \quad (\delta = 1, 2, \ldots, h) \tag{356}$$

i

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta < 0 \quad (\delta = h+1, \ldots, H), \tag{357}$$

gdje je

$$1 \leqq h \leqq H, \tag{358}$$

pa se pitajmo, čime treba nadomjestiti operaciju

$$\prod_{\delta=1}^{H} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}, \tag{359}$$

ako hoćemo parametre x_{s_δ} ($\delta = 1, \ldots, H$) staviti jednako nuli. Primijenimo li jednadžbu II (205), dobivamo

$$\left\{\left(\prod_{\delta=1}^{h} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\right)\cdot \int_{x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})} (y - x_{s_1} - \ldots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \cdot \Lambda_0\left(c\sqrt{t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2 - y^2}\right) dy\right\}_{x_{s_1}=\ldots=x_{s_h}=0} =$$

$$= \frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{h}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]!} \cdot \left(\prod_{\delta=1}^{h} \frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_\delta}\, 2^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\, m_{s_\delta}!\, \Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\right) \cdot \int_{X_h}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})} (y - X_h)^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{h}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \cdot \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2 - y^2}\right) dy, \tag{360}$$

gdje je

$$X_h = x_{s_{h+1}} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}}. \tag{361}$$

Na ovaj izraz treba još da djeluje operacija

$$\prod_{\delta=h+1}^{H} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}, \tag{362}$$

koju zbog (357) i (139) treba prema prije rečenom nadomjestiti operacijom

$$\prod_{\delta=h+1}^{H} \frac{(-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, 2^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}\, (-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta} \tag{363}$$

i poslije izvršenja te operacije staviti

$$x_{s_{h+1}} = \ldots = x_{s_H} = 0. \tag{364}$$

Stavimo li kratkoće radi

$$w = -m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta, \tag{365}$$

vrijedi s obzirom na II (85)

$$\frac{(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!}=\frac{w!}{(2w)!}=\frac{(w-1)!}{2(2w-1)!}=\frac{\Gamma(w)}{2\,\Gamma(2w)}=$$

$$=\frac{(-1)^w\,\Gamma\left(-w+\frac{1}{2}\right)}{2^{2w}\sqrt{\pi}}=$$

$$=\frac{(-1)^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}\,\Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{2^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta}\sqrt{\pi}}, \tag{366}$$

tako da (363) dobiva oblik

$$\prod_{\delta=h+1}^{H}\frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_\delta}\,m_{s_\delta}!\,2^{m_{s\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\,\Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta}. \tag{367}$$

Pod pretpostavkom

$$q\geqq\sum_{r=1}^{s}2n_r, \tag{368}$$

gdje su n_r pozitivni cijeli brojevi, vrijedi očito

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{2n_r}\right)\int_{X}^{t}(z-X)^q\,\varphi(t,z)\,dz\right\}_{x_1=\ldots=x_s=0}=$$

$$=\frac{q!}{(q-2n_1-\ldots-2n_s)!}\int_{X_0}^{t}(z-X_0)^{q-2n_1-\ldots-2n_s}\,\varphi(t,z)\,dz, \tag{369}$$

dok za

$$q<\sum_{r=1}^{s}2n_r \tag{370}$$

lako dobivamo

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{2n_r}\right)\int_{X}^{t}(z-X)^q\,\varphi(t,z)\,dz\right\}_{x_1=\ldots=x_s=0}=$$

$$=(-1)^{q+1}\,q!\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-\left(q-\sum_{r=1}^{s}2n_r\right)-1}\varphi(t,X)\right\}_{X=X_0}. \tag{371}$$

Ako je $X_0\neq 0$, može se dakako već u vitičastoj zagradi staviti $X=X_0$.

Primijenimo li formule (369) odnosno (371) na operaciju (367), koja treba djelovati na izraz (360), izlazi konačno, da iščezavanje parametara $x_{s_1},\ldots,x_{s_H}$ znači, da u (141) treba izraz

$$\prod_{\delta=1}^{H}(-1)^{m_{s_\delta}}\,m_{s_\delta}!\,S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\cdot$$

$$\cdot\int_{x_{s_1}+,,,+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+,,,+x_{k_\gamma})}(y-x_{s_1}-\ldots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2}\cdot$$

$$\cdot\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy \tag{372}$$

za slučaj

$$r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\geqq 0 \tag{373}$$

nadomjestiti izrazom

$$\frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]!}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\delta=1}^{H}\frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_{s_\delta}}\,2^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\,m_{s_\delta}!\,\Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\cdot$$

$$\cdot \int_{X_H}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})} (y-X_H)^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \cdot$$

$$\cdot \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right) dy, \qquad (374)$$

gdje je

$$X_H = x_{s_{H+1}} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}}, \qquad (375)$$

a za slučaj

$$r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi) < 0 \qquad (376)$$

izrazom

$$(-1)^{r-\gamma-1}(r-\gamma-2)! \cdot$$

$$\cdot \prod_{\delta=1}^{H} \frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_\delta} m_{s_\delta}!\, 2^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\, \Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-\left[r-\gamma-1+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-X^2}\right)\right\}_{X=X_H}. \qquad (377)$$

Pojednostavnjenja, koja smo raspravili, mogu se dakako analogno primijeniti na prvi izraz u vitičastoj zagradi u (141). U posljednjem izrazu u toj zagradi može se operator $D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}}$ izravno primijeniti na Besselovu funkciju

$$\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right),$$

što s obzirom na (104) daje

$$D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right) =$$

$$= \frac{c^{2n_{s_1}}}{2^{n_{s_1}}\, n_{s_1}!} \Lambda_{n_{s_1}}\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right), \qquad (378)$$

pa se naknadno može staviti $x_{s_1}=0$, tako da se tu dobije rezultat i bez primjene stavka II. 7, koji bi dakako dao isto, jer je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f(x)\right]\right\}_{x=a}, \qquad (379)$$

ako i limes na lijevoj strani postoji. U tom slučaju ga dakle ne treba nadomjestiti limesom desne strane, kao što to činimo u smislu jednadžbe II (207). Prijetvorbu (378) smo uostalom već upotrebili u formuli (105) za kompoziciju dviju Besselovih funkcija. Što je izvršeno za jednadžbu (141), može se dakako analogno učiniti i za jednadžbu (140), osim prijetvorbe (378), koja ne dolazi u obzir, jer dotičnih članova nema. Kada su neki parametri stavljeni jednako nuli, jasno je, da će se brojevi a_k, b_k, definirani prema (149), (150), tvoriti samo od onih parametara, koji nisu stavljeni jednako nuli, i da će broj članova u kanonskom obliku biti prema tome manji. Ako su napose svi parametri stavljeni jednako nuli, bit će samo jedan par brojeva a_k, b_k, naime $a=b=0$.

11. Kriterij za pojavljivanje integrala u kanonskom obliku integralnih teorema

Prema (153) mogu se kompozicije, koje razmatramo, izraziti pomoću četiri vrste transcendentnih funkcija:

$$\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right), \quad \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right), \qquad (380), (381)$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy, \qquad (382)$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right) dy. \qquad (383)$$

Od tih su funkcija prve dvije vrste dobro poznate Besselove funkcije, za koje postoje i tablice, dok su posljednje dvije vrste manje poznate transcendentne funkcije, za koje smo u IV. 8. dokazali da se ne mogu linearno izraziti pomoću prvih dviju, a ni međusobno. Da su te nove funkcije (382), (383) transcendentne, izlazi već iz toga, što prema (166), (167) za specijalnu vrijednost parametra b_k degeneriraju u trigonometrijske funkcije, za koje znamo da su transcendentne.

Bit će zanimljivo istražiti, pod kojim se uvjetima u kanonskom obliku uopće ne pojavljuju funkcije (382), (383), koje ćemo kratko zvati »integralima«, t. j. kada će racionalne funkcije, koje u (153) fungiraju kao koeficijenti tih integrala, biti identično jednake nuli s obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \ldots, x_r$. Pri tom ćemo uzeti u račun i slučaj, da neki od tih parametara imaju fiksiranu vrijednost nula. Kao odgovor na to pitanje postavljamo

STAVAK IV. 11. Da u kanonskom obliku kompozicija

$$K_{n_1,\ldots,n_r}^{m_1,\ldots,m_r}(t; x_1, \ldots, x_r) \quad (r \geqq 2)$$

koeficijenti integrala budu identično jednaki nuli s obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti onih od parametara $x_1, \ldots, x_r$, koji nisu stavljeni jednako nuli, nužno je i dovoljno, da se ispuni jedan od ovih uvjeta:

A) Za sve $k = 1, \ldots, r$ vrijedi

$$m_k < n_k, \tag{384}$$

a nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

B) Među vrijednostima $k = 1, \ldots, r$ ima jedna vrijednost k_1, za koju je

$$m_{k_1} - n_{k_1} \geqq 0, \tag{385}$$

a za sve ostale $k \neq k_1$ vrijedi

$$m_k - n_k \leqq -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1). \tag{386}$$

Nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

C) Među vrijednostima $k = 1, \ldots, r$ ima lih broj $q > 1$ vrijednosti $k_1, k_2, \ldots, k_q$, za koje je

$$m_{k_j} \geqq 2n_{k_j} \quad (j = 1, \ldots, q), \tag{387}$$

a pripadni parametri su stavljeni jednako nuli:

$$x_{k_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, q). \tag{388}$$

Za sve ostale vrijednosti $k_{q+1}, \ldots, k_r$, ukoliko ih ima (t. j. ako nije $q = r$), vrijedi

$$m_{k_j} - n_{k_j} \leqq -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^{q} (m_{k_\alpha} - n_{k_\alpha})\right]$$
$$(j = q+1, \ldots, r), \tag{389}$$

a pripadni parametri $x_{k_{q+1}}, \ldots, x_{k_r}$ ne moraju biti stavljeni jednako nuli.

U slučaju $r = 2$ uvjet C) je neispunjiv, jer se traži $r \geqq q \geqq 3$, dok se uvjeti A) i B) daju sažeti u

$$m_1 + m_2 < n_1 + n_2. \tag{390}$$

S obzirom na komutativni zakon za komponiranje možemo uvijek postići, da bude $k_1 = 1$, t. j. da (385) glasi

$$m_1 - n_1 \geqq 0, \tag{391}$$

a (386) postane

$$m_k - n_k \leqq -(m_1 - n_1 + 1) \quad (k = 2, \ldots, r). \tag{392}$$

Dalje možemo postići, da vrijednosti $k_1, \ldots, k_q$ budu prve u nizu $1, 2, \ldots, r$, tako da (387) glasi

$$m_k \geqq 2n_k \quad (k = 1, \ldots, q), \tag{393}$$

a mjesto (388) vrijedi

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0. \tag{394}$$

Konačno je (389) nadomješten sa

$$m_k - n_k \leqq -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha+1}^{q} (m_\alpha - n_\alpha)\right]$$
$$(k = q+1, \ldots, r). \tag{395}$$

Time je postignuto pojednostavljenje u pisanju. Prije nego što pristupimo dokazu stavka, primjećujemo: ako je za neku kompoziciju dokazano, da koeficijenti integrala identično iščezavaju, onda taj zaključak ostaje na snazi, ako bilo koje od parametara (koji nisu već stavljeni jednako nuli) stavimo jednako nuli. Ako naime u kanonskom obliku nema integrala (382), (383) i ako neki od koeficijenata funkcija (380), (381) odnosno član R_4 u

(153) postaju neizmjerni, kada dotični parametri teže prema nuli, onda moramo izvršiti granični prijelaz prema stavku II. 7. Takav postupak involvira procese deriviranja, koji, izvršeni na funkcije (380), (381), prema (142) i III (9) daju opet funkcije tih vrsta, tako da u kanonskom obliku opet nema integrala (382), (383). Dokazujemo li dakle, da je koji od uvjeta A), B), C) dovoljan, možemo pretpostaviti, da su samo oni parametri jednaki nuli, koji prema uvjetu to moraju biti, pa će dokaz vrijediti i za slučaj, ako su još dalji parametri stavljeni jednako nuli. Ako dokazujemo, da su ti uvjeti nužni, moći ćemo za slučajeve, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, pretpostaviti, da je što više parametara jednako nuli, i dokazati, da se u kanonskom obliku pojavljuju integrali. Taj će dokaz vrijediti i onda, ako ti parametri nisu stavljeni jednako nuli, jer bi inače integrali morali nastati stavljanjem tih parametara jednako nuli, što smo vidjeli, da ne može biti. Kratko rečeno, stavljanjem parametara jednako nuli mogu integrali iz kanonskoga oblika nestati, ali integrali ne mogu nastati, ako ih nije već bilo.

Dokazujemo najprije, da su uvjeti stavka dovoljni. Pri tome trebamo neke zaključke, koji se daju izvesti iz stavka II. 2. Zamislimo, da je u smislu IV. 7. određen kanonski oblik integrala

$$\int_X^t (y - X)^m \, \Lambda_0 \left(c \sqrt{t^2 - y^2}\right) dy . \tag{396}$$

Pitamo se, pod kojim se uvjetima izvršenjem operacija D_{x_k} $(k = 1, \ldots, n)$ na taj integral mogu ukloniti integrali u njegovu kanonskom obliku.

Razvijemo li potenciju $(y - X)^m$ po binomnom stavku i rastavimo integral (396) na toliko sumanda, koliko taj razvoj ima članova, jasno je prema III (269) i III (333), da članovi s lihim potencijama od y ne prinose integrala za kanonski oblik, pa dakako ni onda, ako na njih još izvršimo neke operacije D_{x_k}. Članovi s takim potencijama od y daju prema III (341) izraz, koji, ako se izostave članovi bez integrala, ima oblik

$$(-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} f_2(t) \, X^{m-2} + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{4} f_4(t) \, X^{m-4} - \ldots \right\} \int_X^t \Lambda_0 \left(c \sqrt{t^2 - y^2}\right) dy +$$

$$+ (-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} g_2(t) \, X^{m-2} + \right.$$

$$\left. + \binom{m}{4} g_4(t) \, X^{m-4} - \ldots \right\} \int_X^t \Lambda_1 \left(c \sqrt{t^2 - y^2}\right) dy , \tag{397}$$

gdje funkcije $f(t)$ i $g(t)$ znače sume, koje u III (341) fungiraju kao koeficijenti integrala, a indeksi tih funkcija znače eksponent od x u integralu na lijevoj strani od III (341).

Primijene li se na izraz (397) operacije D_{x_k}, vidi se, da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove bez integrala., tako da se možemo ograničiti na pitanje, pod kojim se uvjetima primjenom operacijâ D_{x_k} može poništiti izraz oblika

$$X^m - \binom{m}{2} f_2(t) \, X^{m-2} + \binom{m}{4} f_4(t) \, X^{m-4} - \ldots \tag{398}$$

Jasno je, da se mora poništiti koeficijenat svake potencije od t u tom izrazu, a takav koeficijenat ima oblik polinoma

$$aX^m + bX^{m-2} + \ldots , \tag{399}$$

gdje neki od koeficijenata $a, b, \ldots$ mogu biti jednaki nuli. Potencija X^s je prema (80) homogena funkcija s-toga stupnja varijablâ $x_1, \ldots, x_n$, pa primjena nekih operacija D_{x_k} na sumu (399) snižava stupanj svakoga člana, koji pri tome ne iščezne, za isti broj jedinica, tako da su članovi, koji nisu iščezli, različitog stupnja i poslije izvršenja tih operacija, i njihova suma ne može biti jednaka nuli za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \ldots, x_r$. Moraju dakle svi članovi sume (399) iščeznuti svaki za sebe, da cijela suma iščezne. Budući da svaka potencija od X, koja se pojavljuje u (398), mora biti sadržana u nekom koeficijentu (399) neke potencije od t (uključivo nulte potencije), dakle će (398) primjenom operacija D_{x_k} iščeznuti identično s obzirom na t za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \ldots, x_r$ onda i samo onda, ako primjenom tih istih operacija iščeznu sve potencije X^m, $X^{m-2}, \ldots$, koje se nalaze u (398).

Za iščezavanje potencije X^m vrijede kriteriji stavka II. 2. Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij A) toga stavka, t. j. ako je $m < n$ (400), taj je uvjet pogotovu ispunjen i za sve niže potencije od X u (398). Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij B) rečenoga stavka, t. j. ako je $m - n$ lih broj, a $m \geqq n$, onda je i za sve niže potencije X^{m-2k} u (398) $m - 2k - n$ lih broj, pa te potencije, bez obzira na to, da li je

za njih $m - 2k = n$, iščeznu $\frac{m-n+3}{2}$-kratnom primjenom svih operacija D_{x_k}. Te su operacije za poništenje najviše potencije X^m nužne i dovoljne, a za poništenje nižih potencija očito pogotovu dovoljne. Prema tome možemo ustanoviti, da su kriteriji za poništenje integrala u kanonskom obliku od (396) primjenom operacija D_{x_k} isti kao kriteriji prema stavku II. 2., koji su nužni i dovoljni za poništenje potencije X^m.

Prijeđimo sada na pitanje, da li je uvjet A) stavka IV. 11. dovoljan. Promotrimo u tu svrhu prvi član vitičaste zagrade u (140) odnosno (141). Budući da je zbog (384)

$$m_v - n_v - q_v \leqq -1, \tag{401}$$

možemo prema (139) pisati

$$S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} = D_{x_v}^{-m_v + n_v + q_v}. \tag{402}$$

Budući da je $r - 2 < r$ (403), što odgovara uvjetu $m < n$ kriterija A) u stavku II. 2., a primijenjeno je r različitih operacija (402), dok prema rečenom kriteriju treba primijeniti barem $m + 1$, t. j. u našem slučaju $r - 2 + 1 = r - 1$ takvih operacija, ne daje taj član integrala za kanonski oblik.

U drugom članu u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141) može se analogno zbog (384) staviti

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \leqq -1 \tag{404}$$

i prema (139)

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} = D_{x_{s_\delta}}^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta}. \tag{405}$$

Ovdje je broj varijabla $x_{s_1}, \ldots, x_{s_{r-\gamma}}$ jednak $r - \gamma$, pa je $r - \gamma - 2 < r - \gamma$ (406) analogon relacije $m < n$. Izvršeno je $r - \gamma$ operacija (405), što je više nego $m + 1 = r - \gamma - 2 + 1 = r - \gamma - 1$. I ovaj član dakle ne daje integrala za kanonski oblik, a treći član u vitičastoj zagradi (141) uopće ne sadržava integrala. Time je dokazano, da je uvjet A) stavka IV. 11. dovoljan pod pretpostavkom, da nijedan od parametara $x_1, \ldots, x_r$ nije stavljen jednako nuli, što se pretpostavlja u (140), (141). Pogotovu je taj uvjet dovoljan i onda, ako se neki ili svi ti parametri stave jednako nuli, kako smo već prije raspravili. Pretpostavimo dalje, da vrijedi uvjet B) stavka IV. 11., t. j. da

vrijede (301) i (392). Za članove drugog izraza u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141), za koje je m_1 sadržan u brojevima $m_{k_1}, \ldots, m_{k_\gamma}$, t. j. kada je 1 sadržan među $k_1, \ldots, k_\gamma$, vrijedi isto razmatranje kao gore, t. j. ti članovi ne daju integrala. Ako je naprotiv u drugom izrazu vitičaste zagrade 1 sadržan među brojevima $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$, t. j. m_1 među brojevima $m_{s_1}, \ldots, m_{s_{r-\gamma}}$, moramo izvršiti novo razmatranje, koje će biti primjenljivo i na prvi izraz u vitičastoj zagradi.

Zamislimo, da je u drugom izrazu u vitičastoj zagradi na integral najprije primijenjena samo operacija $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$, gdje smo pretpostavili, da je $s_1 = 1$. Smijemo dalje pretpostaviti, da je

$$m_1 - n_1 - v_1 \geqq 0, \tag{407}$$

jer inače operator $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$ u smislu (139) znači deriviranje, i stoga taj slučaj potpada pod argumentaciju, koju smo dali za slučaj uvjeta A) stavka IV. 11. Uvodimo kratice

$$X_1 = x_{k_1} + \ldots + x_{k_\gamma}, \tag{408}$$

$$X_2 = x_{s_1} + x_{s_2} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}} = x_1 + x_{s_2} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}}. \tag{409}$$

Prema definicijama, koje su dane prije formule (131), vrijedi onda

$$X_1 + X_2 = X = x_1 + \ldots + x_r. \tag{410}$$

Supstitucijom

$$z = y - X_2 + x_1 \tag{411}$$

možemo integral drugog izraza u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141) dovesti u nešto drugi oblik:

$$\int_{X_2}^{t-X_1} (y - X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t - X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= (-1)^{r-\gamma-1} \int_{t-X+x_1}^{x_1} (x_1 - z)^{r-\gamma-2} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t - X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}\right) dz. \tag{412}$$

Stavimo sada u II (168)

$$n = r, \quad q = r - \gamma - 2, \quad k = 1, \tag{413), (414), (415}$$

$$\varphi(t; z, x_2, \ldots, x_r) =$$

$$= (-1)^{r-\gamma-1} (r - \gamma - 2)! \, \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t - X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}\right), \tag{416}$$

označivši varijablu y sa z. Prema II (170) i II (175), gdje osim (413) do (416) još stavljamo

$$m = m_1 - n_1 - v_1 , \tag{417}$$

dobivamo onda s obzirom na (412)

$$S^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y - X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-1}(r-\gamma-2)!}{(m_1-n_1-v_1)!\, 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} \left[\left(\int_{x_1}^{z} dz \right)^{r-\gamma-2} (x_1^2 - z^2)^{m_1-n_1-v_1} \right] .$$

$$. \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}\right) dz , \tag{418}$$

što u slučaju $\gamma = r - 2$ (419) [to je najveća moguća vrijednost od γ u dotičnom izrazu od (140) i (141)] daje

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= - \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)!\, 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} (x_1^2 - z^2)^{m_1-n_1-v_1} .$$

$$. \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}\right) dz , \tag{420}$$

dok u slučaju da je $\gamma < r - 2$ (421) možemo prijeći na oblik II (176), t. j.

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y - X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-1}(r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)!\, 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} \left[\int_{x_1}^{z} (z-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2 - u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] .$$

$$. \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}\right) dz . \tag{422}$$

Ako na desnoj strani od (420) i (422) opet uvedemo y prema (411), te formule glase:

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)!\, 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{X_2}^{t-X_1} [x_1^2 - (y - X_2 + x_1)^2]^{m_1-n_1-v_1} .$$

$$. \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy , \tag{423}$$

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y - X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-2}(r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)!\, 2^{m_1-n_1-v_1}} .$$

$$. \int_{X_2}^{t-X_1} \left[\int_{x_1}^{\gamma-X_2+x_1} (y - X_2 + x_1 - u)^{r-\gamma-3} (x_1^2 - u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] .$$

$$. \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy . \tag{424}$$

Stavimo sada

$$X_2 - x_1 = \overline{X}_2 = x_{s_2} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}} . \tag{425}$$

Pretpostavi li se najprije (419), onda je $\overline{X}_2 = x_{s_2}$ (426), pa se integral u (423) može pisati u obliku

$$\int_{x_1+x_{s_2}}^{t-X_1} \left[x_1^2 - (y - x_{s_2})^2\right]^{m_1-n_1-v_1} \Lambda_0 \left(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}\right) dy . \tag{427}$$

Prema (140) odnosno (141) treba na taj integral još primijeniti operaciju

$$S_{x_{s_2}}^{m_{s_2}-n_{s_2}-v_2} = D_{x_{s_2}}^{-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2} , \tag{428}$$

gdje je s obzirom na (392) sigurno

$$-m_{s_2} + n_{s_2} + v_2 \geq m_1 - n_1 + 1 > m_1 - n_1 - v_1 . \tag{429}$$

Razvije li se potencija u integralu (427) po binomnom stavku, dobiju se integrali oblika (396) (gdje je sada $X = x_{s_2}$). Kako smo vidjeli, mogu se na te integrale primijeniti kriteriji stavka II. 2. Najviši će eksponent biti

$$m = 2(m_1 - n_1 - v_1), \tag{430}$$

a i svi su ostali eksponenti tâki. Broj varijabla je jednak jedan, dakle $n = 1$ (431). U slučaju $m = 0$ (432) dat će diferencijacija (428) izraz, koji ne sadržava integralâ. Ako je $m_1 - n_1 - v_1 > 0$ (433), može prema (430) i (431) biti $m > n$, a $m - n$ je lih broj, dakle treba prema stavku II. 2. B) izvršiti jedinu operaciju $D_{x_{s_2}}$, i to

$$\frac{m-n+3}{2} = \frac{2(m_1-n_1-v_1)-1+3}{2} = m_1 - n_1 - v_1 + 1$$

puta. Prema (428) ona je izvršena $-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2$ puta, što je zbog (429) barem toliko kao $m_1-n_1-v_1+1$. U kanonskom obliku dakle nema integrala.

Za slučaj (421) služimo se oblikom (424). S oznakom (425) integral na desnoj strani od (424) dobiva oblik

$$\int_{x_1+\overline{X}_2}^{t-X_1}\left[\int_{x_1}^{y-\overline{X}_2}(y-\overline{X}_2-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}\,du\right]\cdot$$

$$\cdot\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}\right)dy. \qquad (434)$$

Nutarnji integral može se razviti po potencijama od $y-\overline{X}_2$ pomoću formule II (182), čime se dobivaju sami integrali oblika (396):

$$\int_{x_1}^{y-\overline{X}_2}(y-\overline{X}_2-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}\,du=$$

$$=\sum_{s=0}^{r-\gamma-3}\frac{(-1)^{r-\gamma-2-s}(m_1-n_1-v_1)!\binom{r-\gamma-3}{s}\Gamma\left(\frac{r-\gamma-2-s}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{r-\gamma-s}{2}+m_1-n_1-v_1\right)}\cdot$$

$$\cdot\,x_1^{2(m_1-n_1-v_1)+r-\gamma-2-s}(y-\overline{X}_2)^s+$$

$$+\sum_{s=0}^{m_1-n_1-v_1}\frac{(-1)^s\binom{m_1-n_1-v_1}{s}}{(r-\gamma-2)\binom{r-\gamma-2+2s}{r-\gamma-2}}x_1^{2(m_1-n_1-v_1)-2s}(y-\overline{X}_2)^{r-\gamma-2+2s}. \qquad (435)$$

U prvoj je sumi najviši eksponent $s=r-\gamma-3$, koji odgovara eksponentu m u (396) i u stavku II. 2. Da se ponište integrali u kanonskom obliku, treba prema stavku II. 2.A) primijeniti $m+1$ različitih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, svaku barem jedamput. Prema (140) odnosno (141) ima tih operacija $r-\gamma-1$, dakle za jednu više nego što je potrebno, a svaka je izvršena barem jedamput, jer je zbog (386) i (385)

$$-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta\geqq 1. \qquad (436)$$

Članovi prve sume od (435) dakle ne prinose integrala za kanonski oblik.

U drugoj je sumi najmanji eksponent od $y-\overline{X}_2$ jednak $r-\gamma-2$. Tu je $m<n$, a primijenjeno je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-1$, dakle $m+1$ različitih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, što je prema stavku II. 2. A) dosta da se uklone integrali u kanonskom obliku. Za ostale potencije je $m>n$, a

$$m-n=r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1)=2s-1$$

lih broj, pa prema stavku II. 2. B) treba primijeniti sve operacije $D_{x_{s_\delta}}$ $(\delta=2,\ldots,r-\gamma)$, i to svaku $\frac{m-n+3}{2}$ puta. To je u našem slučaju

$$\frac{m-n+3}{2}=\frac{r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1)+3}{2}=s+1$$

puta. No budući da je $s\leqq m_1-n_1-v_1$, to je zbog (386)

$$s+1\leqq m_1-n_1-v_1+1\leqq-(m_{s_\delta}-n_{s_\delta})\leqq-(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta), \qquad (437)$$

tako da je i taj zahtjev zadovoljen, a ni ovi članovi ne prinose integralâ za kanonski oblik. Razmatranje je očito primjenljivo i na prvi član u vitičastoj zagradi u (140), (141), ako stavimo $\gamma=0$. Time je dokazano, da je uvjet B) stavka IV. 11. dovoljan. To pogotovu vrijedi, ako su koji od parametara stavljeni jednako nuli.

Prelazimo na pitanje, da li je uvjet C) stavka IV. 11. dovoljan. Neka dakle vrijede (393), (394), (395). Ako su koji od brojeva $1,\ldots,q$ sadržani među brojevima $k_1,\ldots,k_\gamma$, zbog (393) za njih će vrijediti (348), tako da desna strana od (347) iščezne, kako je tamo spomenuto, kada se dotični parametri prema (394) stave jednako nuli, odnosno tih članova u smislu (140) uopće nema, ako je dotični donji indeks jednak nuli. (Razumije se, da u (140) ne bi moralo baš $r-p$ posljednjih donjih indeksa biti jednako nuli, kako smo radi jednostavnijega pisanja pretpostavili.) U tom slučaju dakle dotični članovi u (140) odnosno (141) otpadaju. Zamislimo prema tome, da su svi brojevi $1,\ldots,q$ sadržani među brojevima $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, na pr. kao $s_1=1$, $s_2=2,\ldots,s_q=q$, gdje je $q\leqq r-\gamma$, jer inače moraju neki od brojeva $1,\ldots,q$ biti sadržani među $k_1,\ldots,k_\gamma$. Na ovaj slučaj može se primijeniti formula (374), gdje samo treba mjesto H pisati q. Zbog $\gamma\leqq r-2$ i uvjeta (393) ne može vrijediti (376), tako da (377) ne dolazi u obzir. (Taj izraz i onako ne bi pridonio integralâ za kanonski oblik.)

Ako je najprije $q = r - \gamma$, to je X_q, koji odgovara X_H u (374), jednak nuli, a operatori u izrazu (372) s v i su integralni operatori, koje prema (140), (141) treba primijeniti. Budući da je q lih broj, bit će i eksponent varijable y u (374) lih, pa taj izraz u smislu III (318) ne daje integrala za kanonski oblik, na čemu ni primjena operatora $D_{x_{k_\varepsilon}}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ prema (140), (141) ništa ne mijenja. Neka je dakle $q < r - \gamma$. U tom slučaju na (374), u kojem piše H mjesto q, treba još primijeniti operatore

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \qquad (\delta = q+1, \ldots, r-\gamma).$$

U smislu stavka II. 2. i izraza (396) vrijedi u ovom slučaju za broj varijabla $n = r - \gamma - q$ (438), a za eksponent pod integralom

$$m = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi). \tag{439}$$

Ako je $m < n$, to prema stavku II. 2. A) treba da bude izvršeno barem $m+1$ različitih operacija $D_{x_{s_\delta}}$ $(\delta = q+1, \ldots, r-\gamma)$, svaka barem jedamput. Budući da je broj različitih izvršenih operacija jednak broju varijabla n, koji je pretpostavljen kao veći od m, a svaka je operacija $D_{x_{s_\delta}}$ s obzirom na (139) izvršena barem jedamput, jer je zbog (393), (395) i $q \geqq 3$

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \leqq m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \leqq -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi)\right] \leqq -\frac{q+1}{2} < -1$$

$$(\delta = q+1, \ldots, r-\gamma), \tag{440}$$

taj je uvjet zadovoljen. Ako je $m \geqq n$, prema (438), (439) $m-n$ je lih broj, jer je q lih, pa se može primijeniti stavak II. 2. B). Broj m je po (439) maksimalan, ako su svi $v_\varphi = 0$, t. j.

$$m_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi). \tag{441}$$

Treba dakle svaku operaciju izvršiti barem

$$\frac{m_{\max} - n + 3}{2} = \frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi) \tag{442}$$

puta, a to je s obzirom na (440) i (139) zaista učinjeno. Prema tome u drugom članu vitičaste zagrade u (140), (141) nema integrala u kanonskom obliku, a isto razmatranje vrijedi i za prvi član, ako stavimo $\gamma = 0$. Ovo vrijedi pogotovu onda, ako su koji od parametara $x_{q+1}, \ldots, x_r$ stavljeni jednako nuli. Time je dokazano, da je i uvjet C) stavka IV. 11. dovoljan.

Prije nego što dokažemo, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, provest ćemo neka pomoćna razmatranja. Recimo, da želimo sve parametre od (140), (141) staviti jednako nuli. Ako za jedan od k_ε $(\varepsilon = 1, \ldots, \gamma)$ vrijedi

$$m_{k_\varepsilon} \geqq 2n_{k_\varepsilon}, \tag{443}$$

onda će s obzirom na (348) svi članovi dotične sume po w_ε otpasti, t. j. članovi za dotičnu kombinaciju $(k_1, \ldots, k_\gamma)$ otpadaju. Možemo dakle pretpostaviti

$$m_{k_\varepsilon} < 2n_{k_\varepsilon} \qquad (\varepsilon = 1, \ldots, \gamma). \tag{444}$$

Indeks sumacije w_ε će onda trebati primiti samo cijele vrijednosti

$$0 \leqq w_\varepsilon \leqq \frac{2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2}, \tag{445}$$

jer za ostale vrijednosti na temelju (348) dotični članovi otpadaju. Prema (355) dobivamo stoga za dotičnu kombinaciju $(k_1, \ldots, k_\gamma)$, a uz odabrane v_φ, kao dio drugoga izraza vitičaste zagrade u (140), (141):

$$\frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{w_1=0}^{\left[\frac{2n_{k_1} - m_{k_1} - 1}{2}\right]} \cdots$$

$$\cdots \sum_{w_\gamma=0}^{\left[\frac{2n_{k_\gamma}-m_{k_\gamma}-1}{2}\right]} \left\{ \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1}\, c^{2w_\varepsilon}\, 2^{n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\, (n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\,(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h} \psi(t,0,\ldots,0) \right\}, \quad (446)$$

gdje smo radi kraćega pisanja stavili

$$h = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi), \quad (447)$$

a $\psi(t, 0, \ldots, 0)$ znači

$$\left[\psi(t, x_{k_1}, \ldots, x_{k_\gamma})\right]_{x_{k_1}=\ldots=x_{k_\gamma}=0},$$

gdje je ψ izraz u uglastoj zagradi u (140), (141), od kojega je odbačen produkt parametara x_{k_ε}. Ponovljenom primjenom formula (423), (424), (435) može se $\psi(t, 0, \ldots, 0)$ izraziti linearno pomoću integrala oblika

$$P = \int_{X_2}^{t} y^M \Lambda_0 \left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy \quad (448)$$

sa

$$X_2 = x_{s_1} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (449)$$

Pri tome možemo pretpostaviti, da je M tâk broj, jer u slučaju lihoga M integrali (448) prema III (254), III (318) ne prinose integralâ za kanonski oblik. Nadomjestit ćemo dakle $\psi(t, 0, \ldots, 0)$ u izrazu (446) integralom (448).

Prvi slučaj. Neka je

$$M = 4n, \quad (450)$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r = N - 2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon \quad (451)$$

sa

$$N = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h. \quad (452)$$

Uvrstimo li to u III (408), dobivamo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon} P = \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N}{2}-\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon}\, M!}{2^{\frac{M}{2}}\, c^{\frac{M}{2}-N+2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon}\, \left(\frac{M}{2}\right)!}\, t^{\frac{M}{2}} P_0 +$$

$$+ \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}} P_1 + \ldots \quad (453)$$

Ako se to uvrsti u (556), vidi se, da će se moći faktori c^{-w_ε} kratiti i da pridolazi faktor $(-1)^{-w_\varepsilon}$, čime je omogućena provedba sumacija po $w_1, \ldots, w_\gamma$, koje su naznačene u (446), i to pomoću formule II (52). Stavimo li u II (52)

$$n = 2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1, \quad (454)$$

$$m = n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1, \quad (455)$$

dobivamo

$$\sum_{w_\varepsilon=0}^{\left[\frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{w_\varepsilon}\, 2^{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1-2w_\varepsilon}\, (n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1-2w_\varepsilon)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\, 2^{2n_{k_\varepsilon}-2m_{k_\varepsilon}-1}\, \Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}, \quad (456)$$

gdje uvjet $m \leq \frac{n-1}{2}$ sada znači

$$n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \leq \frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2},$$

što je ispravno, jer m_{k_ε} nije negativan.

Pišimo (456) u obliku

$$\sum_{w_\varepsilon=0}^{\left[\frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+w_\varepsilon+1}\, 2^{n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\,(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\, 2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\, \Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!} \tag{457}$$

i uvrstimo (453) i (457) u (446). Ako označimo

$$\Pi = \prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\, 2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\, \Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}, \tag{458}$$

dobivamo mjesto (446), u kojem smo ψ nadomjestili integralom (448), izraz

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi + \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}} P_1 + \ldots \tag{459}$$

Drugi slučaj. Neka je

$$M = 4n+2, \tag{460}$$

$$N-2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h = 2r+1. \tag{461}$$

Služeći se ovaj put formulom III (411) dolazimo sasvim analognim načinom do izraza

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M-2}{2}+\frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi + \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}} P_1 + \ldots \tag{462}$$

Treći slučaj. Neka je

$$M = 4n, \tag{463}$$

$$N-2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h = 2r+1. \tag{464}$$

Služimo se formulom III (409) i računamo ovaj put koeficijent od P_1, pa dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}+1} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi + \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \ldots \tag{465}$$

Četvrti slučaj. Neka je

$$M = 4n+2, \tag{466}$$

$$N-2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h = 2r. \tag{467}$$

Služimo se formulom III (410) i dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi + \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \ldots \tag{468}$$

Prvi i drugi slučaj mogu se sažeti u jedan oblik. U oba slučaja je $\frac{M}{2}+N$ tâk broj t. j.

$$\frac{M}{2}+N \equiv 0 \pmod 2, \tag{469}$$

a ta zajednička pretpostavka može biti ostvarena samo prema (450), (451) prvoga slučaja ili prema (460), (461) drugoga slučaja. Vrijede li (450), (451), očito je

$$\frac{M}{4}+\frac{N}{2} \equiv -\frac{M}{4}+\frac{N}{2} \pmod 2, \tag{470}$$

a vrijede li (460), (461), to je

$$\frac{M-2}{4}+\frac{N-1}{2}\equiv-\frac{M}{4}+\frac{N}{2}\pmod 2, \tag{471}$$

tako da se (459) i (462) mogu predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}}P_0\,\frac{(-1)^{-\frac{M}{4}+\frac{N}{2}}M!}{2^{\frac{M}{2}}c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi+\text{const.}\,t^{\frac{M}{2}}P_1+\ldots \tag{472}$$

(Ne tvrdi se, da je konstanta pred $t^{\frac{M}{2}}P_1$ u (459) i (462) ista. Ta konstanta nas dalje ne zanima.)

Treći i četvrti slučaj imaju zajedničku pretpostavku, da je $\frac{M}{2}+N$ lih broj, t. j.

$$\frac{M}{2}+N\equiv 1\pmod 2, \tag{473}$$

a ta pretpostavka može biti ostvarena samo prema (463), (464) trećega slučaja ili prema (466), (467) četvrtoga slučaja. Ako vrijede (463), (464), dobivamo

$$\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}+1\equiv-\frac{M}{4}+\frac{N+1}{2}\pmod 2, \tag{474}$$

a ako vrijede (466), (467), izlazi

$$\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}\equiv-\frac{M}{4}+\frac{N+1}{2}\pmod 2, \tag{475}$$

tako da se (465), (468) mogu predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}+1}P_1\,\frac{(-1)^{-\frac{M}{4}+\frac{N+1}{2}}M!}{2^{\frac{M}{2}+1}c^{\frac{M}{2}-N}\left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!}\,\Pi+\text{const.}\,t^{\frac{M}{2}-1}P_0+\ldots \tag{476}$$

Za kasnije svrhe treba još pretresti predznak produkta (458). Neka je za izvjesne vrijednosti od ε, na pr. za $\varepsilon=1,\ldots,\delta$,

$$n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1\geq 0\quad(\varepsilon=1,\ldots,\delta), \tag{477}$$

dok je za sve ostale vrijednosti od ε

$$n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1<0\quad(\varepsilon=\delta+1,\ldots,\gamma). \tag{478}$$

Razdvajamo onda produkt (458):

$$\Pi=\Pi_1\,\Pi_2, \tag{479}$$

$$\Pi_1=\prod_{\varepsilon=1}^{\delta}\frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\,2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\,\Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}, \tag{480}$$

$$\Pi_2=\prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma}\frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\,2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\,\Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right)\cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}. \tag{481}$$

S obzirom na (477) i II (84) može se pisati

$$\Pi_1=\prod_{\varepsilon=1}^{\delta}\frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\,(2n_{k_\varepsilon}-2m_{k_\varepsilon}-2)!\,m_{k_\varepsilon}!}{2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!\,(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}, \tag{482}$$

a s obzirom na (478) i II (85)

$$\Pi_2=\prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma}\frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1}\,2^{m_{k_\varepsilon}-n_{k_\varepsilon}+1}\,(m_{k_\varepsilon}-n_{k_\varepsilon}+1)!\,m_{k_\varepsilon}!}{(2m_{k_\varepsilon}-2n_{k_\varepsilon}+2)!\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}. \tag{483}$$

Prema tome je

$$\operatorname{sgn}\Pi_1=(-1)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\delta}n_{k_\varepsilon}^{*}}, \tag{484}$$

$$\operatorname{sgn}\Pi_2=(-1)^{\gamma-\delta+\sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma}m_{k_\varepsilon}}, \tag{485}$$

iz čega izlazi predznak čitavoga produkta.

Prelazimo sada na dokaz, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, t. j. da u svim slučajevima, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, kanonski oblik sadržava barem jedan integral.

a) Pretpostavimo, da vrijede uvjeti C) stavka IV. 11., samo s tom razlikom, da nisu svi parametri $x_1, \ldots, x_q$ stavljeni jednako nuli, kako bi prema (394) trebalo biti, već da je jedan od tih parametara, na pr. x_1, po volji, dok su svi drugi parametri uključivo $x_{q+1}, \ldots, x_r$ stavljeni jednako nuli. Neka dakle vrijedi, da je $q > 1$ lih, neka vrijedi (393) i (395), a (394) neka je nadomješten sa

$$x_2 = x_3 = \ldots = x_r = 0. \tag{486}$$

Budući da je x_1 jedini parametar, koji nije stavljen jednako nuli, s obzirom na (149), (150), (151) kao gornje granice integrala (382), (383) u kanonskom obliku dolazi u obzir samo t i $t-x_1$. Provest ćemo dokaz, da u kanonskom obliku ima sigurno integral s gornjom granicom t, t. j. sa $a = 0$, $b = x_1$. Takav se integral očito može pojaviti samo u članovima od (140), (141), gdje je x_1 sadržan među $x_{s_1}, \ldots, x_{s_{r-\gamma}}$. No i $x_2, \ldots, x_q$ moraju tu biti sadržani, jer inače dotični član zbog (393) i (348) otpada, kada se dotični parametar uzme jednak nuli, odnosno uopće nema toga člana, ako je dotični donji indeks jednak nuli, kako se razabira iz (140). Neka je dakle, recimo,

$$x_{s_1} = x_1, \; x_{s_2} = x_2, \ldots, \; x_{s_q} = x_q. \tag{487}$$

Pretpostavimo najprije, da je $r - \gamma > q$ (488), t. j. da među x_{s_δ} $(\delta = 1, \ldots, r-\gamma)$ osim $x_1, \ldots, x_q$ ima još jedan ili više parametara $x_{s_{q+1}}, \ldots, x_{s_{r-\gamma}}$. Označimo prema tome

$$r - \gamma - q = \chi \geqq 1. \tag{489}$$

Primijenimo na integral u drugom članu vitičaste zagrade u (140), (141) najprije operacije

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = 2, \ldots, q)$$

i stavimo dotične parametre jednako nuli. Budući da je $q \geqq 3$, $r - \gamma > q$, $0 \leqq 2v_\delta \leqq m_{s_\delta}$, a vrijedi (393), to se lako vidi, da je uvjet (373), u kojemu sada φ prima vrijednosti od 2 do q, sigurno ispunjen, tako da dobivamo izraz (374), gdje φ i δ primaju vrijednosti od 2 do q, a X_H je nadomješten sa

$$\overline{X}_{2,q} = (\overline{X}_2)_{x_2 = \ldots = x_q = 0} = x_{s_{q+1}} + \ldots + x_{s_{r-\gamma}}, \tag{490}$$

t. j. dobivamo integral oblika

$$\int_{\overline{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y - \overline{X}_{2,q})^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)} \Lambda_0 (c\sqrt{(t-X_1)^2 - y^2})\, dy. \tag{491}$$

Ako se na ovaj integral primijeni operacija $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$, dobivaju se u analogiji s formulom (424) odnosno (434) i (435) sami integrali oblika

$$\int_{x_1 + \overline{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y - \overline{X}_{2,q})^R \, \Lambda_0 (c\sqrt{(t-X_1)^2 - y^2})\, dy. \tag{492}$$

Treba pri tome svagdje eksponenat $r - \gamma - 2$ nadomjestiti eksponentom u (491), tako da je najveća vrijednost indeksa sumacije s u prvoj sumi (435)

$$r - \gamma - 3 + 2\sum_{\varphi=2}^{q} (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

a u drugoj sumi eksponenat od $y - \overline{X}_{2,q}$ glasi

$$r - \gamma - 2 + 2\sum_{\varphi=2}^{q} (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi) + 2s.$$

Očito je eksponenat R najviši u drugoj sumi za $v_1 = v_2 = \ldots = v_q$, $s = m_1 - n_1$, dakle

$$R_{\max} = r - \gamma - 2 + 2\sum_{\varphi=2}^{q} (m_\varphi - n_\varphi) + 2(m_1 - n_1) =$$

$$= r - \gamma - 2 + 2\sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi). \tag{493}$$

Primijenimo sada na integrale oblika (492) operatore

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = q+1, \ldots, r-\gamma)$$

i stavimo dotične parametre jednako nuli. S obzirom na (395), a u smislu (139) stavimo

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta} = D_{x_\delta}^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta} \tag{494}$$

i nadomjestimo ih prema razlaganjima na početku točke 10. sa

$$\frac{2^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta}. \tag{495}$$

Formula (369) nije neposredno primjenljiva, jer donja granica integrala (492) nije $\overline{X}_{2,q}$, već $x_1 + \overline{X}_{2,q}$, tako da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove, koji ne otpadaju, kao što je to u slučaju formule (369). Ipak ti članovi ne sadržavaju više integralâ, i jasno je, da će i sada uvjet analogan sa (370) biti dovoljan, da se dobije izraz bez integrala. Taj bi uvjet glasio

$$R < 2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta). \tag{496}$$

Prema (493) je

$$R \leqq R_{\max} = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi - n_\varphi). \tag{497}$$

Dalje je

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \leqq \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta). \tag{498}$$

S obzirom na (395) i (489) vrijedi

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \geqq \chi\left[\frac{q+1}{2}+\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)\right], \tag{499}$$

dakle

$$2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)+2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}) \leqq -\chi(q+1)-2(\chi-1)\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) \leqq$$

$$\leqq -\chi(q+1) = -(r-\gamma-q)(q+1). \tag{500}$$

Razmotrimo li parabolu

$$y = -(r-\gamma-x)(x+1) \tag{501}$$

i stavimo $y = r-\gamma-2$ (502), izlazi

$$x_1 = \frac{r-\gamma-1}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2}{r-\gamma-1}}\right], \tag{503}$$

$$x_2 = \frac{r-\gamma-1}{2}\left[1-\sqrt{1+\frac{2}{r-\gamma-1}}\right]. \tag{504}$$

Budući da je q lih broj veći od jedan, i s obzirom na (445), izlazi

$$3 \leqq q \leqq r-\gamma-1, \tag{505}$$

dakle svakako $r-\gamma-1 > 0$ (506). Jasno je, da za $x_1 > x > x_2$ (507) vrijedi $y < r-\gamma-2$ (508). S obzirom na (506) vrijedi prema (503), (504) $x_1 > r-\gamma-1$ (509), $x_2 > 0$ (510), dakle se može na temelju (507) i (505) pisati

$$x_1 > r-\gamma-1 \geqq q \geqq 3 > 0 > x_2, \tag{511}$$

pa je stoga prema (501) i (508) za naš q

$$-(r-\gamma-q)(q+1) < r-\gamma-2 \tag{512}$$

Prema (497), (500), (512) i (498) vrijedi dakle

$$R = R_{\max} = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) < 2\sum_{\delta=q+1}^{s-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta), \tag{513}$$

a to je traženi uvjet (496). Slučaj $r-\gamma > q$ dakle ne daje integrala za kanonski oblik. Razmatranje dakako vrijedi i za prvi član vitičaste zagrade u (140), (141), ako se stavi $\gamma = 0$. Pretpostavimo dakle sada

$$r-\gamma = q \geqq 3. \tag{514}$$

($r-\gamma < q$ ne dolazi u račun, jer bi onda neki od parametara $x_1, \ldots, x_q$ bili među $x_{k_1}, \ldots, x_{k_\gamma}$, a taj slučaj smo već prije odbacili.) (514) određuje jednoznačno γ, a određuje i kombinaciju $(s_1, \ldots, s_{r-\gamma})$, jer u njoj moraju biti sadržani brojevi $1, \ldots, q$, t. j. ta kombinacija je identična s kombinacijom $(1, \ldots, q)$. Jasno je, da je prema (490) sada $\overline{X}_{2,q} = 0$ (515). Integrali (492), koji potječu od članova druge sume (435), u kojoj je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-2$ nadomješten sa

$$r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

imaju svi lihe eksponente R, jer je zbog (514) sa q i $r-\gamma$ lih. Ti integrali prema III (254), III (318) ne prinose integralâ za kanonski oblik. Među članovima prve sume (435) ima naprotiv i potencijâ s tâkim eksponentima. Najveća je vrijednost eksponenta s uz odabrane v_φ, kako smo spomenuli,

$$r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

a ta je tâka, jer je $r-\gamma$ lih i prima svoju najveću vrijednost za $v_2 = \ldots = v_q = 0$, t. j. imamo za tâki R

$$R_{\text{tak max}} = M = r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi - n_\varphi) = q-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi - n_\varphi). \tag{516}$$

Na dotični integral treba u smislu (353) još primijeniti stanovite diferencijacije po t, tako da se radi o izrazu poput (446). Prema (472) odnosno (476) dobivamo dakle za kanonski oblik ili $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ s koeficijentom, koji je očito od nule različit (jer je i faktor, koji potječe iz (435) od nule različit), uz eventualno

još druge članove s nižim potencijama od t. Integrali (492) s manjim tâkim eksponentom R, dakle sa $R \leqq M-2$ (517), daju prema (472) i (476) članove s najvišom potencijom od t oblika

$$t^{\frac{M}{2}-1} P_0 \text{ odnosno } t^{\frac{M}{2}} P_1.$$ Članovi $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$,

koje nam je dao integral s eksponentom M, sigurno su dakle jedini te vrste, pa budući da im se koeficijenat razlikuje od nule, kako smo spomenuli, dokaz je time izvršen, da u kanonskom obliku ima barem jedan integral. To vrijedi pogotovu onda, ako koji od parametara $x_2, \ldots, x_r$ nije stavljen jednako nuli.

b) Pretpostavimo, da je

$$m_k \geqq n_k \quad (k = 1, \ldots, q), \tag{518}$$

gdje je q lih broj, za koji ovaj put dopuštamo i vrijednost $q = 1$. (Za neke ili sve vrijednosti $1, \ldots, q$ može dapače vrijediti $m_k \geqq 2n_k$.) Neka dalje postoji barem jedna vrijednost $k = k_f > q$, za koju je

$$m_{k_f} - n_{k_f} > -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^{q}(m_k - n_k)\right], \tag{519}$$

a najviše jedna vrijednost $k = k_g > q$, za koju je

$$m_{k_g} \geqq 2n_{k_g}. \tag{520}$$

[Među vrijednostima $k = q+1, \ldots, r$ može biti takvih, za koje je $m_k \geqq n_k$. Ako ima takva vrijednost ili ako za jednu od njih vrijedi dapače (520), tada je tom vrijednošću već zadovoljen uvjet (519).] Konačno neka budu svi parametri stavljeni jednako nuli.

Dokazat ćemo, da u kanonskom obliku ima integrala. Uzmimo opet u razmatranje drugi izraz vitičaste zagrade u (140), (141). Jasno je najprije, da među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ moraju biti sadržani svi oni indeksi k, za koje je $m_k \geqq 2n_k$, jer bi inače dotični članovi za $x_k = 0$ u smislu (347) otpali, ako je $n_k > 0$, jer za njih vrijedi (348), a uopće ih nema, ako je $n_k = 0$, kako se vidi iz (140). Uzet ćemo povrh toga među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ još i sve

one indekse k, za koje je $m_k \geqq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Budući da su svi parametri stavljeni jednako nuli, primjena će operatorâ $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta}$ prema (360) dati integral oblika

$$\int_0^t y^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy, \qquad (521)$$

na koji u smislu (446) treba još primijeniti stanovite diferencijacije po t. Ako je $r-\gamma$ tâk broj, bit će eksponenat u tom integralu tâk, i budući da smo za $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ odabrali sve one vrijednosti, za koje je $m_{s_\varphi} \geqq n_{s_\varphi}$, za $v_1 = \ldots = v_{r-\gamma} = 0$ ovo je i najveći tâki eksponenat, koji se može pojaviti. U smislu (472), (476) kanonski će oblik dakle sadržavati

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \quad \text{ili} \quad t^{\frac{M}{2}+1} P_1$$

sa

$$M = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}). \qquad (522)$$

Ako je naprotiv $r-\gamma$ lih broj, eksponent će biti lih, i članovi (521) dakle prema III (254), III (318) ne prinose integrala za kanonski oblik. U tom slučaju moramo potražiti članove s najvećim tâkim eksponentom pod znakom integracije. Zato moramo broj $r-\gamma$ ili povećati ili smanjiti. Treba dakle iz indeksa $k_1, \ldots, k_\gamma$ preseliti još neke indekse među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ ili iz ovih neke indekse preseliti među $k_1, \ldots, k_\gamma$. Preseljenjem nekoga indeksa k_ε u $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$, za koji je $m_{k_\varepsilon} < n_{k_\varepsilon}$, povećava se $r-\gamma$ za 1, tako da se eksponent smanjuje za $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1 \geqq 1$, dok se preseljenjem nekoga indeksa $s_{\delta i}$, za koji je $m_{s_\delta} \geqq n_{s_\delta}$, među $k_1, \ldots, k_\gamma$ eksponent smanjuje za $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1 \geqq 1$. Budući da želimo smanjiti eksponent za što manje, svakako ćemo izvršiti samo jedno preseljenje, čime će se naš lihi eksponent smanjiti za lih broj, tako da će postati tâk. Pri tom su dakako svi v_φ stavljeni jednako nuli, jer konačni tâki eksponent treba da bude što veći.

Ako se prebacuje jedan indeks iz $k_1, \ldots, k_\gamma$ u $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$, zvat ćemo to preseljenjem prve vrste. Pri tome se γ promijenio u γ_1, tako da je $\gamma_1 = \gamma - 1$ (523). Prebacuje li se indeks iz $s_1, \ldots, s_{-\gamma}$ u $k_1, \ldots, k_\gamma$, neka se to zove preseljenje druge vrste, a γ se pri tome mijenja u γ_2, tako da je $\gamma_2 = \gamma + 1$ (524). Treba sada dokazati:

1) da uvijek postoji barem jedna mogućnost preseljenja, koja vodi do integrala, čiji se koeficijent razlikuje od nule;

2) da su onda, kad ima više mogućnosti preseljenja, koje vode do istoga najvećeg tâkog eksponenta, koeficijenti dotičnih istovrsnih integrala za kanonski oblik svi istoga predznaka, te se ne mogu međusobno ukinuti.

Ad 1). Neka ima osim (518) još daljih indeksa, za koje je $m_k \geqq n_k$, a koje smo prema prije rečenom, uvrstili među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$. Mora ih biti tâk broj, dakle barem dva, jer bi inače zbog lihoga q $r-\gamma$ bio tâk, a taj slučaj smo već uzeli u račun. Od ta dva indeksa ili više njih može prema pretpostavkama najviše za jedan vrijediti $m_k \geqq 2n_k$, dakle ima i barem jedan, za koji je $m_k \geqq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Taj se posljednji indeks može preseliti među $k_1, \ldots, k_\gamma$, da dotični članovi onda ne otpadnu. Eksponent je poslije preseljenja

$$\overline{M} = r-\gamma_2-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma_2}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}), \qquad (525)$$

koji sigurno nije negativan, jer je $m_{s_\varphi} \geqq n_{s_\varphi}$ za sve φ, pa budući da ima barem jedan indeks (518) (jer je $q \geqq 1$), a bar je jedan dalji, koji nije sadržan u (518), ali je za nj $m_k \geqq n_k$, preostao među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$, onda je $r-\gamma_2 \geqq 2$. To preseljenje druge vrste dakle zaista vodi do člana (521), koji može pridonijeti integralâ za kanonski oblik.

Ako naprotiv osim (518) nema nijednog indeksa, za koji je $m_k \geqq n_k$, ipak prema pretpostavkama ima barem jedan indeks k_f za koji vrijedi (519). Taj se nalazi među $k_1, \ldots, k_\gamma$, pa ćemo ga preseliti među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$. Budući da je sada $r-\gamma = q$, bit će $r-\gamma_1 = q+1$, a eksponent će postati

$$\overline{M} = r - \gamma_1 - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}) =$$

$$= q - 1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}). \qquad (526)$$

Prema (519) vrijedi

$$m_{k_f} - n_{k_f} \geq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^{q} (m_k - n_k) \right] + 1 \qquad (527)$$

ili

$$2(m_{k_f} - n_{k_f}) \geq - q + 1 - 2 \sum_{k=1}^{q} (m_k - n_k), \qquad (528)$$

dakle je

$$N \geq q - 1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - q + 1 - 2 \sum_{k=1}^{q} (m_k - n_k) = 0. \qquad (529)$$

Ni ovdje dakle eksponent ne može biti negativan, t. j. ovo preseljenje prve vrste daje član oblika (521), koji može pridonijeti integralâ za kanonski oblik. Time je pokazano, da uvijek ima barem jedno preseljenje, koje vodi do cilja.

Ad 2). Kako smo rekli, među $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$ stavljeni su svi indeksi k, za koje je $m_k \geq n_k$ (među kojima se nalaze i oni, za koje je dapače $m_k \geq 2n_k$), dok se svi drugi indeksi nalaze među $k_1, \ldots, k_\gamma$. Za preseljenje prve vrste dolaze u račun oni od indeksa k između $k_1, \ldots, k_\gamma$, za koje je izraz $2(n_k - m_k) - 1$ što manji, jer se za tu vrijednost smanjuje eksponent pod integralom (521). Za preseljenje druge vrste dolaze u račun indeksi s između $s_1, \ldots, s_{r-\gamma}$, za koje je izraz $2(m_s - n_s) + 1$ što manji, jer se za toliko smanjuje rečeni eksponent, a osim toga mora biti $m_s < 2n_s$, jer inače poslije preseljenja svi članovi otpadaju, kako smo spomenuli.

Neka je μ_1 minimum izraza $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ $(\varepsilon = 1, \ldots, \gamma)$, a μ_2 minimum izraza $2(m_{s_\delta} - n_{s_{\delta_1}}) + 1$ $(\delta = 1, \ldots, r-\gamma)$, za koje je $m_{s_\delta} < 2n_{s_\delta}$. Ako je $\mu_1 < \mu_2$, dolaze u račun samo preseljenja prve vrste, ako je $\mu_1 > \mu_2$, samo preseljenja druge vrste, a ako je $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ dolaze u račun obje vrste preseljenja. Pretpostavit ćemo taj najopćenitiji slučaj. Neka izraz $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ primi taj minimum za nekoliko vrijednosti indeksa k_ε, na pr. za $k_\varepsilon = a$, $k_\varepsilon = b$ i t. d., t. j.

$$2(n_a - m_a) - 1 = 2(n_b - m_b) - 1 = \ldots = \mu. \qquad (530)$$

Izraz $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1$ neka primi taj minimum za neke vrijednosti $s_\delta = \alpha$, $s_\delta = \beta$ i t. d., za koje je $m_{s_{\delta_1}} < 2n_{s_\delta}$, t. j.

$$2(m_\alpha - n_\alpha) + 1 = 2(m_\beta - n_\beta) + 1 = \ldots = \mu. \qquad (531)$$

Sva preseljenja pojedinih indeksa $a, b, \ldots$ i $\alpha, \beta, \ldots$ dovode do istoga najvećeg tâkog eksponenta

$$\overline{M} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - \mu. \qquad (532)$$

Pita se najprije, da li će za integrale kanonskoga oblika, koji su pomnoženi najvećom potencijom od t, biti primjenljiva formula (472) ili (476). Označimo li u smislu (452), (447) sa N_1 i h_1 dotične izraze poslije preseljenja prve vrste indeksa a, a sa N_2 i h_2 ove izraze poslije preseljenja druge vrste indeksa α i analogno dotične veličine γ_1 i γ_2 prema (523) i (524), očito je s obzirom na $v_\varphi = 0$

$$h_1 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a, \qquad (533)$$

$$h_2 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha, \qquad (534)$$

$$N_1 = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_\alpha - m_\alpha) - \gamma_1 + k_1 =$$

$$= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_\alpha - m_\alpha) - (\gamma - 1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_\alpha =$$

$$= N + 2(m_\alpha - n_\alpha) + 1, \tag{535}$$

$$N_2 = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + (2n_\alpha - m_\alpha) - \gamma_2 + h_2 =$$

$$= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + 2n_\alpha - m_\alpha - (\gamma + 1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha =$$

$$= N - 2(m_\alpha - n_\alpha) - 1, \tag{536}$$

dakle

$$\frac{\overline{M}}{2} + N_1 - \left(\frac{\overline{M}}{2} + N_2\right) = N_1 - N_2 = 2(m_\alpha - n_\alpha + m_\alpha - n_\alpha) + 2 \equiv 0 \pmod 2, \tag{537}$$

pa stoga

$$\frac{\overline{M}}{2} + N_1 \equiv \frac{\overline{M}}{2} + N_2 \pmod 2. \tag{538}$$

Prema tome vrijede ili za sva preseljenja (469) i (472) ili za sva preseljenja (473) i (476).

Treba sada pokazati, da je predznak članova s integralom $t^{\frac{\overline{M}}{2}} P_0$ prema (472) odnosno s integralom $t^{\frac{\overline{M}}{2}+1} P_1$ prema (476) poslije svih pojedinih preseljenja isti, tako da se ti članovi sigurno ne mogu ukidati. Taj se predznak sastoji od ovih faktora:

α) Faktor, koji potječe iz formule (360), iz koje smo dobili integrale oblika (521). U toj formuli (360) treba dakako staviti $h = r - \gamma$. Prema II (84) vrijedi za

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \geqq 0, \tag{539}$$

$$\Gamma\left(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2m_{s_\delta} - 2n_{s_\delta})!}{2^{2m_{s_\delta} - 2n_{s_\delta}}\,(m_{s_\delta} - n_{s_\delta})!} \tag{540}$$

a za

$$m_\alpha - n_\alpha < 0 \tag{541}$$

prema II (85)

$$\Gamma\left(m_\alpha - n_\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n_\alpha - m_\alpha}\sqrt{\pi}\,2^{2n_\alpha - 2m_\alpha}\,(n_\alpha - m_\alpha)!}{(2n_\alpha - 2m_\alpha)!}. \tag{542}$$

Prema tome na temelju formule (360) predznak za slučaj preseljenja prve vrste, recimo indeksa α, ima oblik $(-1)^{E_1(\alpha)}$, gdje je

$$E_1(\alpha) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + n_\alpha + (n_\alpha - m_\alpha) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_\alpha - m_\alpha, \tag{543}$$

dok je u slučaju preseljenja druge vrste, recimo indeksa α, taj eksponent od (-1)

$$E_1(\alpha) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} - n_\alpha. \tag{544}$$

β) Faktor, koji se pojavljuje u formulama (742) odnosno (476). Prema (472) bio bi eksponent od (-1) poslije preseljenja prve vrste indeksa α s obzirom na (535)

$$E_2(\alpha) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N_1}{2} = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + m_\alpha - n_\alpha + \frac{1}{2}, \tag{545}$$

a poslije preseljenja druge vrste indeksa α s obzirom na (536)

$$E_2(\alpha) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N_2}{2} = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2}. \tag{546}$$

Ako se primjenjuje (476), glasile bi te formule analogno

$$E_2(\alpha) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N+1}{2} + m_\alpha - n_\alpha + \frac{1}{2}, \tag{547}$$

$$E_2(\alpha) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N+1}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2}. \qquad (548)$$

Razumije se, da su eksponenti (545), (546) cijeli brojevi, ako za $\frac{\overline{M}}{2_\delta^n} + N_1$ i $\frac{\overline{M}}{2} + N_2$ vrijedi uvjet (469), a eksponenti (547), (548) su cijeli, ako analogno vrijedi uvjet (473).

γ) Faktor (484). Poslije preseljenja prve vrste vrijedi za sve preostale indekse k_ε uvjet (477). Tih indeksa ima $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, t. j. od prvotnih γ indeksa otpao je indeks α, tako da je eksponent od (—1)

$$E_3(\alpha) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_\alpha. \qquad (549)$$

Kod preseljenja druge vrste pridolazi među indekse k_ε indeks α, za koji (477) ne vrijedi, dakle $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$ i eksponent od (—1) je

$$E_3(\alpha) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon}. \qquad (550)$$

δ) Faktor (485). Poslije preseljenja prve vrste ne vrijedi ni za koji od preostalih k_ε uvjet (478), tako da je $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, dakle eksponent od (—1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_1 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_1} m_{k_\varepsilon} = 0. \qquad (551)$$

Poslije preseljenja druge vrste za jedini indeks α, koji je pridošao među k_ε, vrijedi uvjet (478), tako da je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$, i eksponent od (—1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_2 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_2} m_{k_\delta} = 1 + m_\alpha. \qquad (552)$$

Ako je dakle primjenljiva formula (472), ukupni je eksponent od (—1) za slučaj preseljenja prve vrste prema (543), (545), (549), (551)

$$E(\alpha) = E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + E_3(\alpha) + E_4(\alpha) =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_\alpha - m_\alpha - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + m_\alpha - n_\alpha + \frac{1}{2}\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_\alpha + 0 =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}, \qquad (553)$$

a za preseljenje druge vrste prema (544), (546), (550), (552)

$$E(\alpha) = E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + E_3(\alpha) + E_4(\alpha) =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} - n_\alpha - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} + 1 + m_\alpha =$$

$$= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}. \qquad (554)$$

Kada je primjenljiva formula (476), dobivamo analogno, upotrebivši (547) odnosno (548) umjesto (545) odnosno (546), iste formule, samo je N nadomješten sa $N+1$. Svakako je

$$E(\alpha) = E(\alpha), \qquad (555)$$

a budući da izrazi (553) i (554) uopće ne ovise o tome, da li smo preselili indeks α ili b i t. d. odnosno α ili β i t. d., bit će dakle

$$E(\alpha) = E(b) = \ldots = E(\alpha) = E(\beta) = \ldots, \qquad (556)$$

t. j. sva dopustiva preseljenja daju članove s istim predznakom. U slučaju primjenljivosti formule (472) osigurali smo dakle, da u kanonskom obliku postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}} P_0$, a u slučaju primjenljivosti formule (476) da postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$. Time je izveden dokaz, da pod uvjetima b) ima integralâ u kanonskom obliku. To vrijedi tim više, ako parametri nisu stavljeni jednako nuli, kako smo to pretpostavili.

c) Na temelju razlaganja pod a) i pod b) možemo sada izvesti dokaz, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, t. j. da u svim slučа-

jevima, gdje nijedan od tri uvjeta A), B), C) toga stavka nije zadovoljen, ima integrala u kanonskom obliku. Da dobijemo sve te slučajeve, razlikujemo ove mogućnosti:

1. Nema nijednoga indeksa k, za koji je $m_k \geqq 2n_k$.
2. Ima jedan indeks, za koji je $m_k \geqq 2n_k$.
3. Ima tâk broj (veći od nule) takvih indeksa.
4. Ima lih broj veći od jedan takvih indeksa.

Ad 1. Da uvjet A) stavka IV. 11. ne bude zadovoljen, mora postojati indeks k_1, za koji je

$$m_{k_1} \geqq n_{k_1}. \tag{557}$$

Da uvjet B) ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_2, za koji je

$$m_{k_2} - n_{k_2} > -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1). \tag{558}$$

Uvjet C) očito nije zadovoljen. Budući da (557), (558) odgovaraju pretpostavkama (518) i (519) za $q = 1$, taj je slučaj sadržan pod b). U kanonskom obliku dakle ima integralâ.

Ad 2. Uvjeti A) i C) očito nisu zadovoljeni. Budući da iz $m_k \geqq 2n_k$ izlazi $m_k \geqq n_k$, postoji indeks, za koji vrijedi (557), tako da moramo tražiti, da postoji i indeks, koji zadovoljava (558), jer bi inače bio zadovoljen uvjet B). Time je slučaj opet sveden na razmatranje pod b). I ovdje dakle ima integralâ u kanonskom obliku.

Ad 3. Ako je broj indeksa, za koje vrijedi $m_k \geqq 2n_k$, jednak $q+1$, gdje je q lih broj, za q indeksa vrijedi pogotovu (518), dok $(q+1)$-ti svakako zadovoljava (520) i ujedno (519). I ovaj slučaj se dakle svodi na razmatranje pod b), dakle ima integralâ u kanonskom obliku.

Ad 4. Uvjeti A) i B) očito nisu zadovoljeni. Ako od uvjeta C) nije zadovoljen (395), onda to znači, da ima jedan indeks, za koji vrijedi (519), dok sa (393) nužno vrijedi i (518). Prema razlaganju pod b) dakle ima integralâ u kanonskom obliku. Ako je naprotiv (395) zadovoljen, moramo pretpostaviti, da ima barem jedan indeks među $1, \ldots, q$, za koji dotični parametar nije uzet jednak nuli, tako da je prekršen uvjet (394). Ovaj slučaj je raspravljen pod a), tako da i tu ima integrala u kanonskom obliku. Time su sve mogućnosti iscrpene, i dokaz stavka IV. 11. je izvršen.

12. Nekoliko specijalnih slučajeva integralnih teorema

Kao primjenu općih razmatranja odredit ćemo kanonski oblik najjednostavnijih integralnih teorema. Odabiramo za to kompozicije dviju Besselovih funkcija, kojima nijedan indeks nije veći od jedan. Da tekst bude kraći, stavit ćemo iznad znaka jednakosti broj formule, na kojoj se temelji dotična prijetvorba. Slučaj, da je koji parametar stavljen jednako nuli, napose će se navesti, ako kod toga nastaje neodređen oblik, pa je potreban granični prijelaz.

$$K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) \overset{(129)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} \int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy =$$

$$\overset{\text{II (187)}}{=} -\frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} S_{j(x_k)} \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) =$$

$$\overset{\text{II (188)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{t-x_1-x_2} \Phi(y)\, \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(y+x_1+x_2)^2}\right) dy =$$

$$\overset{\text{II (194)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{x_1+x_2}^{t} \Phi(y-x_1-x_2)\, \Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right) dy, \tag{559}$$

$$\Phi(x) \overset{\text{II (189)}}{=} F_1(x) * F_2(x) * H(x), \tag{560}$$

$$F_1(x) \overset{\text{II (159), II (191)}}{=} x + x_1, \tag{561}$$

$$F_2(x) \overset{\text{II (159), II (191)}}{=} x + x_2, \tag{562}$$

$$H(x) \overset{\text{II (188)}}{=} 1. \tag{563}$$

Dakle

$$\Phi(y-x_1-x_2) = \int_0^{y-x_1-x_2} \left[\int_0^{\eta} (\eta-\xi+x_1)(\xi+x_2)\, d\xi \right] d\eta. \tag{564}$$

Izračunavanje ovoga integrala daje

$$\Phi(y-x_1-x_2)=\frac{y^4}{24}-\frac{(x_1^2+x_2^2)\,y^2}{4}+\frac{(x_1^3+x_2^3)\,y}{3}-\frac{(x_1^2-x_2^2)^2}{8}. \quad (565)$$

Izvrši li se u (559) diferencijacija po t, izlazi:

$$K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2) \overset{\text{III (9)}}{=}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left\{\Phi(t-x_1-x_2)-\frac{c^2t}{2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy\right\}=$$

$$\overset{\text{III (9)}}{=}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t-x_1-x_2)-\frac{c^2}{2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-$$

$$-\frac{c^2t}{2}\Phi(t-x_1-x_2)+\frac{c^4t^2}{8}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_2\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy. \quad (566)$$

Uvrsti li se ovdje (565), integrali se raspadaju u integrale oblika

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^m\,\Lambda_n\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy$$

sa $m=4,2,1,0$ i $n=1,2$. Ti se integrali mogu izraziti ovako:

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^4\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy=$$

$$\overset{\text{III (383)}}{=}\frac{2}{c^2}\left[t^3-(x_1+x_2)^3\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1-x_2)^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{6}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^2\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (255)}}{=}\frac{2t^3}{c^2}+\frac{6t}{c^4}-$$

$$-\left[\frac{2(x_1+x_2)^3}{c^2}+\frac{6(x_1+x_2)}{c^4}\right]\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)-$$

$$-\frac{3(x_1+x_2)\left[t^2-(x_1+x_2)^2\right]}{c^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)-$$

$$-\frac{6}{c^4}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-\frac{3t^2}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy, \quad (567)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^2\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (382)}}{=}\frac{2}{c^2}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{2}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy, \quad (568)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (384)}}{=}\frac{2}{c^2}\left[1-\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right], \quad (569)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^4\,\Lambda_2\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (382)}}{=}\frac{4}{c^2}\left[t^3-(x_1+x_2)^3\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{24}{c^4}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right]+\frac{24}{c^4}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy, \quad (570)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y^2\,\Lambda_2\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (382)}}{=}\frac{4}{c^2}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right]-$$

$$-\frac{4}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy, \quad (571)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}y\,\Lambda_2\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (384)}}{=}\frac{4}{c^2}\left[1-\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)\right], \quad (572)$$

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_2\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\text{III (336)}}{=}\frac{4}{c^2t}-\frac{4(x_1+x_2)}{c^2t^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)-$$

$$-\frac{8}{c^2t^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+\frac{4}{c^2t^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy. \quad (573)$$

Pomoću tih izraza dolazi se konačno do kanonskoga oblika, koji glasi:

$$K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)=\frac{x_1+x_2}{8}\left[t^2+(x_1-x_2)^2+\frac{1}{c^2}\right]\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\frac{x_1+x_2}{16}\left[t^2-c^2t^2(x_1-x_2)^2+c^2(x_1^2-x_2^2)^2-(x_1+x_2)^2\right]\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\left[\frac{t^2}{8}+\frac{c^2(x_1^2-x_2^2)^2}{8}-\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+\frac{1}{8c^2}\right]\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+$$

$$+\left[\frac{t^2}{16}+\frac{c^2t^2(x_1^2+x_2^2)}{8}\right]\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-\frac{t}{8c^2}-\frac{t(x_1^2+x_2^2)}{4}. \quad (574)$$

Slično se dobiva

$$K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)\overset{(129)}{=}-\frac{\partial}{\partial t}S_{x_1}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy=$$

$$\overset{\text{II (187)}}{=}\frac{\partial}{\partial t}S_{x_1}S_{j(x_k)}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)=$$

$$\overset{\text{II (188), II (194)}}{=}\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1+x_2}^{t}\Phi(y-x_1-x_2)\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy=$$

$$\overset{\text{III (9)}}{=}\Phi(t-x_1-x_2)-\frac{c^2t}{2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Phi(y-x_1-x_2)\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy, \quad (575)$$

$$\Phi(x)=F_1(x)*H(x)=\int_0^x(\xi+x_1)\,d\xi, \quad (576)$$

$$\Phi(y-x_1-x_2)=\frac{y^2}{2}-x_2y-\frac{x_1^2-x_2^2}{2}. \quad (577)$$

Uvrštenje u (575) daje uz pomoć od (567), (569):

$$K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)=$$

$$=\frac{(x_1-x_2)t}{2}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+\frac{t}{2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+$$

$$+\frac{c^2(x_1^2-x_2^2)t}{4}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-\frac{x_1^2-x_2^2}{2}. \quad (578)$$

Dalje dobivamo

$$K_{1,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)=$$

$$\overset{(87)}{=}\frac{2}{c^2x_1}\left\{\frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1(t-x_1)\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{\text{(574), III (9), III (11)}}{=}\frac{x_1-x_2}{c^2}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\frac{2(t-x_1)}{c^2}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)-$$

$$-\frac{x_1-x_2}{2}\left[t^2-(x_1+x_2)^2\right]\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\left[(x_1^2-x_2^2)-\frac{1}{c^2}\right]\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x^2}\right)dy+$$

$$+\frac{t^2}{2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-\frac{t}{c^2}; \quad (579)$$

$$K_{1,1}^{1,1}(t;x_1,x_2)=$$

$$\overset{(88)}{=}\frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2}+x_2(t-x_2)\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(579),\,\mathrm{III}\,(9),\,\mathrm{III}\,(11)}{=} -\frac{2(x_1+x_2)}{c^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) +$$

$$+\frac{2(t-x_1)}{c^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)+\frac{2(t-x_2)}{c^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)-$$

$$-\frac{4}{c^2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy; \tag{580}$$

$$K_{1,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)\overset{(87)}{=}\frac{2}{c^2x_1}\left\{\frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(578),\,\mathrm{III}\,(9)}{=}\frac{2}{c^2}\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)+t\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy-\frac{2}{c^2}; \tag{581}$$

$$K_{0,1}^{1,0}(t;x_1,x_2)=$$

$$\overset{(88)}{=}\frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2}+(t-x_2)\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(578),\,\mathrm{III}\,(9)}{=}-\frac{2t}{c^2x_2}\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\left(\frac{2t}{c^2x_2}-\frac{2}{c^2}\right)\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)-t\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+\frac{2}{c^2}; \tag{582}$$

$$K_{1,1}^{1,0}(t;x_1,x_2)=$$

$$\overset{(88)}{=}\frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K_{1,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2}+(t-x_2)\,\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(581),\,\mathrm{III}\,(9)}{=}-\frac{2t}{c^2x_2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+\frac{2}{c^2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)+$$

$$+\frac{2(t-x_2)}{c^2x_2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right); \tag{583}$$

$$K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)\overset{(69)}{=}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy; \tag{584}$$

$$K_{1,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)\overset{(87)}{=}\frac{2}{c^2x_1}\left\{\frac{\partial K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1}+\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(584)}{=}\frac{2}{c^2x_1}\left\{-\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right\}; \tag{585}$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t;x_1,x_2)\overset{(88)}{=}\frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K_{1,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2}+\mathbf{\Lambda}_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right\}=$$

$$\overset{(585),\,\mathrm{III}\,(9)}{=}-\frac{2(x_1+x_2)}{c^2x_1x_2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right)+$$

$$+\frac{2}{c^2x_1}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)+\frac{2}{c^2x_2}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right). \tag{586}$$

Stavi li se u kompozicijama (582), (583), (585), 586 $x_1=0$, odnosno $x_2=0$, odnosno oboje, granični prijelaz daje:

$$K_{0,1}^{1,0}(t;x_1,0)=-\frac{2}{c^2}\,\mathbf{\Lambda}_0\left[c(t-x_1)\right]-tx_1\,\mathbf{\Lambda}_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right)-$$

$$-\int_{x_1}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+\frac{2}{c^2}; \tag{587}$$

$$K_{1,1}^{1,0}(t;x_1,0)=-\frac{4t}{c^2(t+x_1)}\,\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right)+$$

$$+\frac{2(t-x_1)}{c^2(t+x_1)}\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right)+\frac{2}{c^2}\,\mathbf{\Lambda}_1\left[c(t-x_1)\right]; \tag{588}$$

$$K_{1,0}^{0,0}(t;0,x_2)=(t-x_2)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right); \tag{589}$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t;0,x_2) = -\frac{4}{c_2^2(t+x_2)}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) -$$

$$-\frac{2(t-x_2)}{c^2x_2(t+x_2)}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) + \frac{2}{c^2x_2}\Lambda_1[c(t-x_2)]; \quad (590)$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t;0,0) = -\frac{8}{c^2t}[\Lambda_1(ct) - \Lambda_1(ct)]. \quad (591)$$

Formule za kompozicije, koje se iz navedenih mogu dobiti pomoću komutativnog zakona komponiranja, kao

$$K_{0,1}^{1,1}, K_{0,0}^{0,1}, K_{1,0}^{0,1}, K_{1,1}^{0,1}, K_{0,0}^{0,1}, K_{0,1}^{0,0},$$

nije potrebno posebno navesti.

Očito je (589) identičan sa I (148), dok (585) daje I (149), ako se stavi $x_2 = 0$. Vidi se dakle, da su teoremi I (148) i I (149), do kojih smo došli drugim putem već u I. dijelu, sadržani kao specijalni slučajevi u našim općim formulama.

Još ćemo na tim primjerima provjeriti ispravnost stavka IV. 11. Lako je vidjeti, da

$$K_{1,1}^{1,0}, K_{1,0}^{0,0} \text{ i } K_{1,1}^{0,0}$$

zadovoljavaju uvjet (390), pa zaista prema (583), (585), (586) u kanonskom obliku nema integrala, dok ih ima za

$$K_{0,0}^{1,1}, K_{1,0}^{1,1}, K_{1,1}^{1,1}, K_{0,0}^{1,0}, K_{1,0}^{1,0}, K_{0,1}^{1,0} \text{ i } K_{0,0}^{0,0},$$

kako pokazuju formule (574), (579), (580), (578), (581), (582), (584).

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. X. 1948).

Dr. Stanko BILINSKI

HOMOGENE MREŽE ZATVORENIH ORIJENTABILNIH PLOHA

1. Uvod

U jednom drugom članku[1] bio je razmatran problem homogenih mreža ravnine s općeg topološkog stajališta, a i s metričkog stajališta u ravninama triju geometrija. Prirodno se nameće zamisao, da se analogni problem postavi i za ostale topološke tipove ploha. U ovom će se dakle članku taj problem proširiti samo na zatvorene orijentabilne plohe. No i problem homogenih mreža zatvorenih neorijentabilnih ploha mogao bi se na sličan način postaviti i rješavati.

Plohe, kojih ćemo mreže ovdje promatrati, neka su topološki regularne, dakle bez topoloških singulariteta, t. j. neka za svaku točku plohe postoji okoliš homeomorfan krugu. Ako je takva ploha zatvorena orijentabilna ploha roda p, mi ćemo je u daljem razmatranju simbolički označiti sa $P(p)$.

Problem homogenih mreža ploha $P(p)$ u njegovu najjednostavnijem obliku — koji bi odgovarao slučaju p r a v i l n i h homogenih mreža ravnine, gdje se pored topološke pravilnosti tražila i određena metrička pravilnost — može se postaviti samo u poznatom slučaju kugline plohe, no kako je kuglina ploha homeomorfna ravnini sferne geometrije, bio je taj slučaj homogenih mreža već promatran u [1].

Ne može se ovdje zahtijevati metrička pravilnost u smislu pravilnih homogenih mreža za plohe $P(p)$ u slučajevima $p \geqq 1$, jer te plohe u trodimenzionalnom euklidskom prostoru moraju biti nejednoliko zakrivljene. Ovdje ćemo dakle razmatrati problem homogenih mreža ploha $P(p)$ samo s topološkog stajališta. Pritom ćemo se služiti simboličkom oznakom i nekim osnovnim pojmovima onako, kako su oni definirani u [1]. No kako su tamo definicije bile prilagođene baš problemu homogenih mreža r a v n i n e, trebat će da ih sada djelomice izmijenimo i malo

[1] S. Bilinski [1]. (Brojevi u uglatim zagradama odnose se na literaturu, koja se nalazi na kraju članka.)

općenitije postavimo. Da zbog složene suvislosti promatranih ploha ne bi neki zanimljivi slučajevi unaprijed iz razmatranja bili isključeni, i samu ćemo definiciju mreže[2] sada malo preinačiti. Ne ćemo naime isključiti mogućnost višestruke incidencije jedne stranice i jednog poligona ni mogućnost dvostruke incidencije jedne stranice i jednog čvorišta ili dvostruke incidencije jedne stranice i jednog poligona. Zato ćemo pojam mreže sada ovako definirati:

Skup S, koji nije prazan, a sastavljen je od tri vrste elemenata, koje ćemo zvati »čvorišta, stranice«, odnosno »poligoni«, čini »mrežu«, ako ima ova svojstva:

1) Za svaka dva elementa različitih vrsta određeno je, koliko su puta među sobom incidentni ili nisu incidentni.

2) Ako među trima elementima različitih vrsta postoje incidencije, onda uz svaku incidenciju stranice sa čvorištem i stranice s poligonom postoji uvijek i incidencija čvorišta s poligonom.

3) Uz svaku incidenciju jednog čvorišta s jednim poligonom postoje točno dvije stranice, koje su s tim čvorištem i s tim poligonom incidentne, ali tako, da uz dvije različite incidencije čvorišta s poligonom postoje dva različita para s njima incidentnih stranica, t. j. takva dva para, koji se barem u jednoj stranici razlikuju. Reći ćemo, da spomenuti par stranica čini »kut« i da taj kut pripada tom čvorištu i tom poligonu. Dva kuta, koja pripadaju istom čvorištu ili istom poligonu, a imaju jednu stranicu zajedničku, zvat ćemo »susjednima«.

4ª) Svaka je stranica incidentna s dva razna čvorišta, ili je dvaput incidentna s jednim istim čvorištem. Dva čvorišta incidentna s istom stranicom zvat ćemo »susjednima«.

4ᵇ) Svaka je stranica incidentna s dva razna poligona, ili je dvaput incidentna s jednim istim poligonom. Dva poligona incidentna s istom stranicom zvat ćemo »susjednima«.

5ª) Svako je čvorište incidentno barem s jednom stranicom.

5ᵇ) Svaki je poligon incidentan barem s jednom stranicom.

6) K svakom se paru istovrsnih elemenata skupa S dade odrediti konačan slijed susjednih elemenata toga skupa, kojemu je prvi i posljednji član par zadanih elemenata.

[2] [1] Definicija 10.

7ª) Susjedni kutovi, koji pripadaju jednom istom čvorištu, čine ciklus.

7ᵇ) Susjedni kutovi, koji pripadaju jednom istom poligonu, čine ciklus.

Osim toga trebat će nam još ove definicije, oznake i objašnjenja:

Čvorište, kojemu pripada s kutova, zvat ćemo »s-terostrukim čvorištem«.

Poligon, kojemu pripada n kutova, zvat ćemo »n-terokutom«.

Neka je A s-terostruko čvorište neke mreže, a među kutovima, koji mu pripadaju, neka je k_1 kutova n_1-terokuta, k_2 kutova n_2-terokuta, k_3 kutova n_3-terokuta, ..., k_r kutova n_r-terokuta, onda je

$$s = \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Označimo li svaki kut čvorišta A sa n_i, t. j. s brojem kutova onog poligona, kojemu taj kut pripada, onda će sa $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$ biti označen ciklus kutova, koji pripadaju čvorištu A.

Ako su kod neke mreže ciklusi kutova za sva čvorišta među sobom jednaki, onda ćemo je zvati »R-mrežom«, a ciklus C, zajednički za sva čvorišta, zvat ćemo ciklusom te mreže, koju ćemo simbolički označiti sa

$$R\,[n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$$

ili kraće $R\,[C]$.

Neka je α s-terokut neke mreže, a među kutovima, koji mu pripadaju neka je k_1 kutova n_1-strukog čvorišta, k_2 kutova n_2-strukog čvorišta, ..., k_r kutova n_r-strukog čvorišta, onda je

$$s = \sum_{i=1}^{r} k_i.$$

Označimo li svaki kut poligona α sa n_i, t. j. s brojem kutova onog čvorišta, kojemu taj kut pripada, onda će sa $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$ biti označen ciklus kutova, koji pripadaju poligonu α.

Ako su kod neke mreže ciklusi kutova za sve poligone među sobom jednaki, zvat ćemo je »Q-mrežom«, a ciklus C, zajednički za sve poligone, zvat ćemo ciklusom te mreže, koju ćemo simbolički označiti s $Q\,[n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$ ili kraće $Q\,[C]$.

R-mreže i Q-mreže zvat ćemo zajedničkim imenom »homogene mreže«.

Budući da su Q-mreže recipročne R-mrežama, vrijedit će za njih isti zaključci s obzirom na mogućnost egzistencije pojedine mreže i dualni s obzirom na broj pojedinih elemenata mreže, pa je dovoljno, da dalje razmatramo samo jedne od njih. Mi ćemo se dakle ograničiti samo na proučavanje R-mreža.

Iz gornjih ćemo definicija sada izvesti neke posve jednostavne zaključke.

Ima li mreža konačni broj elemenata, označit ćemo sa α_0, α_1 i α_2 broj čvorišta, stranica odnosno poligona. Budući da po definiciji mreže skup S njezinih elemenata nije prazan, mora vrijediti barem jedna od ove tri relacije

$$\alpha_0 \geqq 1; \quad \alpha_1 \geqq 1; \quad \alpha_2 \geqq 1. \qquad (1)_{1,2,3}$$

No vrijedi li jedna, i to bilo koja od njih, iz 4^a), 4^b), 5^a) i 5^b) izlazi odmah, da i preostale dvije moraju vrijediti.

Nadalje, ako je s broj kutova, koji pripadaju jednom čvorištu, mora uvijek biti

$$s \geqq 3. \qquad (2)$$

Izlazi to iz 7^a) i iz činjenice, da svaki ciklus sadržava barem tri elementa[3].

Ako je n broj kutova n-terokuta, na isti način iz 7^b) zaključujemo, da mora uvijek biti

$$n \geqq 3. \qquad (3)$$

Ako nekom čvorištu homogene mreže pripada k_i kutova n_i-terokuta, pa se u ciklusu homogene mreže neki određeni broj n_i doista nalazi, onda ponajprije za pripadni broj k_i mora vrijediti

$$k_i \geqq 1 \qquad (4)$$

[3] [1] Stavak 1.

a zatim, kako svakom čvorištu te homogene mreže pripada barem jedan kut n_i-terokuta, mora među svim poligonima mreže biti sadržan barem jedan n_i-terokut, t. j. mora biti

$$q_{n_i} \geqq 1, \qquad (5)$$

gdje je q_{n_i} broj svih n_i-terokuta te homogene mreže.

Pojam mreže, koji je dan u gornjim definicijama, sada ćemo geometrijski konkretizirati:

Pod »mrežom plohe $P\,(p)$« razumijevat ćemo naime takvu njezinu razdiobu u poligone (koji cijelu plohu potpuno i jednostruko pokrivaju), koja zadovoljava uvjetima 1)—7^b) gornje definicije. Pritom ćemo pod »poligonom« razumijevati topološku sliku kruga, gdje je na periferiji istaknuto nekoliko točaka, »čvorišta«, a »stranica« neka je Jordanov luk omeđen čvorištima, koji luk neka je ujedno zajednička granica poligonâ. Relaciju incidencije razumijevat ćemo u njezinu običnom geometrijskom smislu. Reći ćemo, da je takva mreža plohe $P\,(p)$ »homogena«, ako ispunjava uvjete gornjih definicija R-mreže ili Q-mreže.

Kod istraživanja homogenih mreža ravnine u sfernoj, paraboličnoj i hiperboličnoj geometriji pokazalo se, da se za mogućnost egzistencije tih mreža moraju zadovoljiti dvije vrste uvjeta. Prvi od tih uvjeta — u raznim geometrijama različiti — jesu posljedica metričkih svojstava pojedinih od tri ravnine. Drugi uvjet je kombinatoričko-topološke prirode i za sve geometrije isti. Oba ta uvjeta čine tek zajedno sistem dovoljnih uvjeta za egzistenciju homogenih mreža ravnine.

Pitanje egzistencije homogenih mreža ploha $P\,(p)$ sadržava bitno novi momenat. Ovaj drugi, t. j. topološki, uvjet egzistencije mreže ravnine postavljen je naime na osnovi zamišljene postepene izgradnje takve mreže. Pritom je bitna pretpostavka, da kod te postepene izgradnje mreže ravnine u svakom momentu onaj već izgrađeni dio mreže obuhvaća jedno jednostavno-suvislo područje ravnine. Pokazalo se, da se kod takve — na posve određeni način zamišljene — postepene izgradnje mreže ravnine identifikacija, kako pojedinih elemenata mreže, tako već i složenijih njezinih kompleksa, odvija na osnovi sheme složenih ciklusa[4]. Kako se kod postepene izgradnje mreže neke plohe $P\,(p)$ u slučaju $p > 0$ — zbog složene suvislosti te plohe

[4] [1] § 1. definicija 8. i 9. i §§ 7. i 8.

— ta bitna pretpostavka ne može ispuniti, dolazit će kod te postepene izgradnje mreže do identifikacije i nekih drugih elemenata mreže, a ne samo prema shemi složenih ciklusa. Zbog toga uvjeti egzistencije mreže, koji su za ravninu bili dovoljni, bit će ovdje samo nužni. Zato će trebati još s jednog drugog stajališta istražiti mogućnost egzistencije homogenih mreža ploha $P(p)$. Pokazat će se, da se pritom slučajevi $p = 0$, $p = 1$ i $p \geqq 2$ među sobom bitno razlikuju[5].

2. Homogene mreže torusa*)

Poznati slučaj homogenih mreža plohe $P(0)$, koje su izomorfne Arhimedovim polupravilnim poliedrima, ovdje ne ćemo više razmatrati, nego ćemo obratiti pažnju samo slučajevima $p \geqq 1$. Razmotrimo dakle najprije slučaj $p = 1$, t. j. slučaj torusa.

Univerzalna ploha pokrivanja (»Covering suface«, »Überlagerungsfläche«) plohe $P(1)$ homeomorfna je paraboličnoj ravnini. Odatle izlazi neposredno, da će svakoj mreži $R[C]$ plohe $P(1)$ odgovarati jedna mreža $R[C]$ parabolične ravnine, no prebrz bi bio zaključak, da vrijedi i obrnuto, t. j. da svakoj mreži $R[C]$ parabolične ravnine odgovara jedna mreža $R[C]$ plohe $P(1)$. Iz gornjeg naime još ne bi moralo izlaziti, da je egzistencija mreže $R[C]$ parabolične ravnine dovoljna za egzistenciju mreže $R[C]$ plohe $P(1)$.

Fundamentalna grupa plohe $P(1)$ je slobodna Abelova grupa s dvije izvodnice (Erzeugende). Ona je izomorfna dvoparametarskoj diskontinuiranoj grupi translacija ravnine određenoj vektorima

$$\mathbf{r} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \tag{6}$$

gdje su m i n cijeli brojevi, a $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva linearno nezavisna vektora. Za fundamentalno područje te grupe možemo uzeti na pr. paralelogram, kojemu su stranice vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Identifikacijom suprotnih stranica toga paralelograma nastaje ploha $P(1)$. Prema tome je jasno, ako postoji mreža $R[C]$ parabolične ravnine, bit će za isti ciklus C moguća homogena mreža plohe

[5] U članku: H. Heesch [6] našao sam rezultate, koji su djelomice slični nekim rezultatima ovog članka. Ipak sam ovdje zadržao te rezultate iz dva razloga. Najprije radi potpunosti i zaokruženosti cjeline, a zatim, jer su izvedeni na drugi način.

* Bilješka dodana kod korekture. U članku H. S. M. Coxeter [5] promatrane su pravilne mreže torusa.

$P(1)$ samo onda, ako grupa simetrijâ jedne metričke mreže $R[C]$ parabolične ravnine sadržava kao subgrupu jednu diskontinuiranu grupu translacija određenu relacijom (6). No iz slikâ pravilnih homogenih mreža parabolične ravnine[6] neposredno se razabira, da svaka od tih mreža sadrži doista grupu (6) kao subgrupu grupe svojih simetrija. Odatle izlazi, da će biti moguće homogene mreže plohe $P(1)$ sa svakim onim ciklusom, s kojim su moguće i homogene mreže parabolične ravnine. No protivno nego u slučaju homogenih mreža plohe $P(0)$ broj pojedinih elemenata mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ ne će ciklusom C biti određen. To možemo lako ovako razabrati:

Neka je (6) grupa translacijâ sadržana u grupi simetrijâ neke određene pravilne mreže $R[C]$ parabolične ravnine, ali tako, da su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva najmanja moguća linearno nezavisna vektora onih translacija, kod kojih mreža prelazi sama u sebe. Uočimo sada bilo koju subgrupu grupe (6) određenu vektorima

$$\mathbf{r}_{kl} = mk\mathbf{a} + nl\mathbf{b}, \tag{7}$$

gdje su m i n cjelobrojni parametri, a k i l bilo koja dva čvrsto odabrana prirodna broja. Za fundamentalno područje grupe (7) možemo uzeti paralelogram, kojemu su stranice vektori $k\,\mathbf{a}$ i $l\,\mathbf{b}$, a identifikacijom suprotnih stranica bit će i opet određena jedna ploha $P(1)$. Za dva različita para brojeva k_1, l_1 i k_2, l_2 bit će fundamentalna područja grupe (7), t. j. spomenuti paralelogrami na mreži $R[C]$ parabolične ravnine različite površine osim u slučaju, kad je

$$k_1 l_1 = k_2 l_2, \tag{8}$$

pa će zato i dvije pripadne mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ sadržavati različiti broj pojedinih elemenata mreže. Samo ako vrijedi jednadžba (8), imat će obje mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ isti broj elemenata, ali ni sada one ne moraju biti izomorfne, jer pripadni paralelogrami parabolične ravnine, iako su iste površine, ne moraju obuhvatati kongruentne dijelove mreže ravnine.

Budući da ima neizmjerno mnogo klasa topoloških preslikavanja torusa na torus, koja ne mogu prijeći običnom deformacijom jedna u druge, jasno je, da dvije izomorfne mreže torusa općenito ne moraju biti homotopne. Možemo te slučajeve razmotriti na pr. ovako:

Neka je (6) bilo koja subgrupa grupe translacija sadržane u grupi simetrijâ neke pravilne mreže $R[C]$ parabolične ravnine (dakle $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ sada ne moraju biti najmanji mogući vektori

[6] [1], str. 105—107.

translacije). Poznata je činjenica, ako je x_1, y_1 par relativno prostih brojeva, onda diofantska jednadžba

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1 \tag{9}$$

ima uvijek rješenje u x_2, y_2. Neka dakle vrijedi relacija (9) i neka je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= x_1 \mathbf{a} + y_1 \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= x_2 \mathbf{a} + y_2 \mathbf{b}, \end{aligned} \tag{10}$$

onda i paralelogram Π_1, kojemu su stranice vektori **a'** i **b'**, čini jedno fundamentalno područje grupe (6). Samo u slučajevima, kada je

$$x_1 = y_2 = 1, \quad x_2 = y_1 = 0,$$

ili kada je

$$x_1 = y_2 = 0, \quad x_2 = y_1 = 1 \tag{11}$$

paralelogram Π_1 kongruentan je paralelogramu Π, kojemu su stranice vektori **a** i **b**. Neka dakle relacije (11) *ne* vrijede, pa neka je $P_1(1)$ ploha određena identifikacijom suprotnih stranica paralelograma Π. Smatramo li za korespondentne takve dvije točke ploha $P(1)$ i $P_1(1)$, koje su slike bilo jedne iste točke parabolične ravnine, bilo dviju točaka ekvivalentnih s obzirom na grupu (6), onda će tom korespondencijom ploha $P(1)$ biti topološki preslikana na plohu $P_1(1)$, ali kod toga preslikavanja bilo koja zatvorena crta plohe $P(1)$ ne mora prijeći u homotopnu crtu plohe $P_1(1)$. Tako će i pripadne mreže $R[C]$ obiju ploha biti izomorfne, ali ne homotopne, t. j. jedna mreža ne može prijeći u drugu jednom običnom deformacijom plohe $P(1)$.

Primjeri dviju takvih izomorfnih, ali ne homotopnih, mreža dani su u sl. 1. i sl. 2., koje predočuju mreže $R[3, 4, 6, 4]$ ploha $P(1)$ i $P_1(1)$, gdje su korespondentna čvorišta označena istim brojem. U tom su primjeru u relacijama (10) uzete vrijednosti $x_1 = y_1 = y_2 = 1$; $x_2 = 0$.

Budući da relacija (9) ima neizmjerno mnogo rješenja, bit će za isti ciklus neizmjerno mnogo izomorfnih mreža plohe $P(1)$, koje nisu homotopne.

Zaključak ovih razmatranja možemo dakle ukratko ovako izreći:

S t a v a k 1. *Ako je za neki ciklus* C *moguća homogena mreža parabolične ravnine (a takvih je ciklusa u svemu jedanaest), onda za taj ciklus* C *postoji neizmjerno mnogo među sobom anizomorfnih mreža torusa, a među onima od tih mreža, koje su među sobom izomorfne, postoji opet neizmjerno mnogo njih, koje nisu homotopne. Za preostale cikluse homogene mreže torusa nisu moguće.*

3. Homogene mreže zatvorenih ploha roda većeg od jedinice**)

Hiperbolična je ravnina homeomorfna univerzalnoj plohi pokrivanja plohe $P(p)$ u slučajevima $p \geqq 2$. (U idućem razmatranju neka je radi kratkoće sa $P'(p)$ označena općenita ploha $P(p)$, gdje je $p \geqq 2$). Prema tome, ako postoji mreža $R[C]$ bilo koje plohe $P'(p)$, sigurno postoji za isti ciklus C i homogena mreža hiperbolične ravnine. Dakle je za neki određeni ciklus C egzistencija mreže $R[C]$ hiperbolične ravnine nužni uvjet egzistencije mreže $R[C]$ neke plohe $P'(p)$.

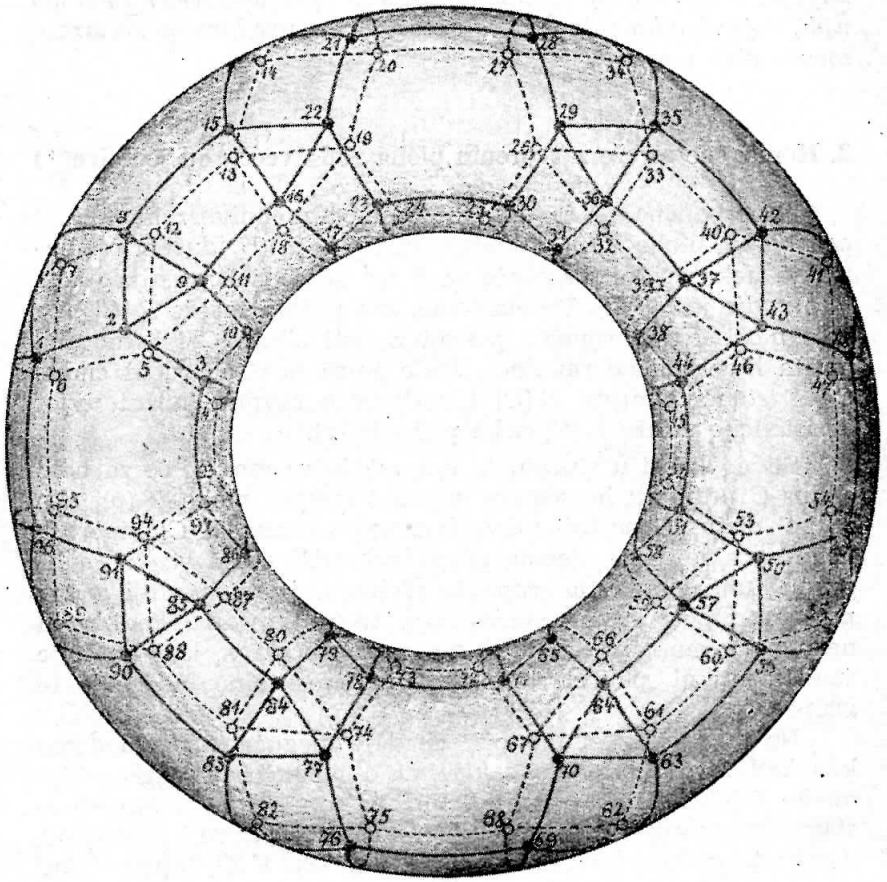
Slično kao i u slučaju torusa zaključujemo, da će za neki ciklus C postojati homogena mreža određene plohe $P'(p)$, ako za isti ciklus C postoji takva homogena mreža $R[C]$ hiperbolične ravnine, gdje njezina grupa simetrijâ sadržava kao subgrupu fundamentalnu grupu te plohe, t. j. ako postoji grupa pomaka hiperbolične ravnine bez fiksnih točaka, kod kojih neka homogena mreža $R[C]$ sama sebe pokriva, kod kojih je fundamentalni poligon te plohe fundamentalno područje te grupe.

No ta nam spoznaja ipak ne daje mogućnost, da dođemo kao kod torusa brzo do zaključka o mogućnosti egzistencije mreže $R[C]$ na nekoj plohi $P'(p)$, jer je — osim u najjednostavnijim, trivijalnim, slučajevima — teško, gotovo i nemoguće, razabrati, da li grupa simetrija neke mreže $R[C]$ hiperbolične ravnine doista sadrži fundamentalnu grupu neke plohe $P'(p)$ kao subgrupu.

Zato u ovom slučaju moramo potražiti drugi način, koji bi nam dao mogućnost da odgovorimo na pitanje egzistencije homogene mreže određene plohe $P(p)$ za neki određeni ciklus

** Bilješka dodana kod korekture. U raspravama H. S. M. Coxeter [2], [3] promatrane su neke homogene mreže zatvorenih ploha naročito u vezi sa teorijom grupa.

C. Radi toga ćemo najprije naći neke relacije, koje određuju broj elemenata homogene mreže. Iz tih ćemo relacija onda moći izvesti neke općenite zaključke s obzirom na postavljene probleme.



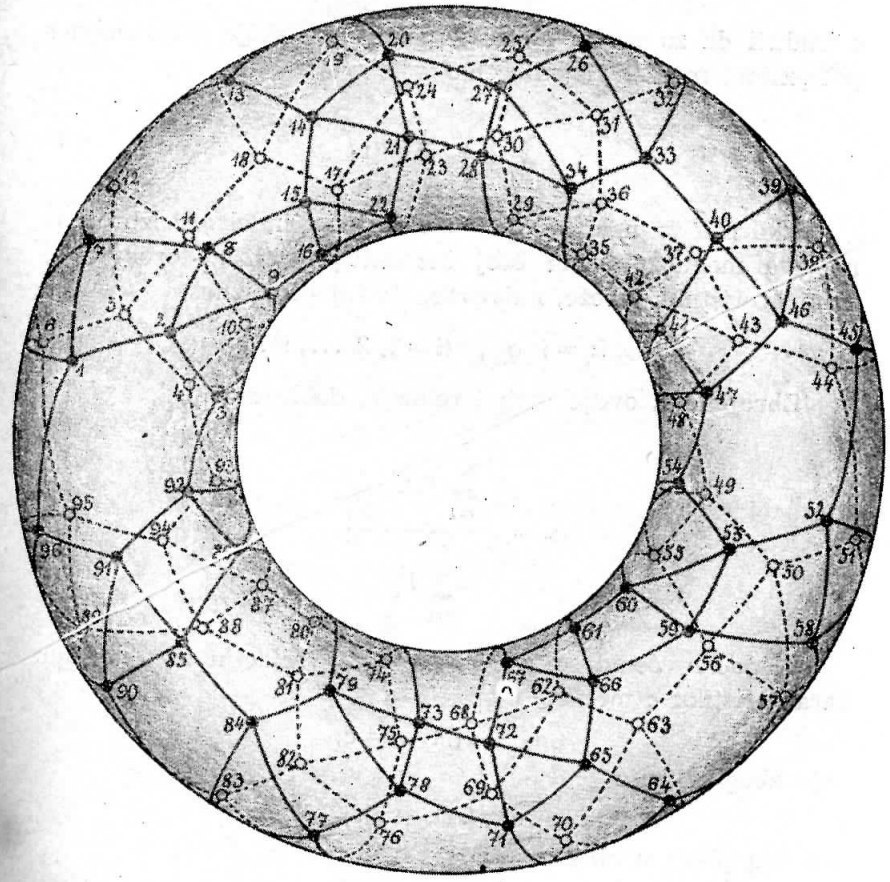
Sl. 1.

4. Broj pojedinih elemenata homogenih mreža zatvorenih orijentabilnih ploha

Dok je kod kugle broj pojedinih elemenata homogene mreže njezinim ciklusom C posve određen, pokazali smo naprotiv, da kod homogenih mreža torusa to ne vrijedi. Pitajmo

se sada, da li kod ploha $P'(p)$ ciklus homogene mreže broj njezinih elemenata određuje?

Da na to pitanje odgovorimo, pretpostavimo, da postoji homogena mreža $R[C]$ neke određene plohe $P'(p)$, pa neka



Sl. 2.

u ciklusu $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$ te mreže dolazi k_i kutova n_i-terokuta $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Pita se najprije, koje sve relacije možemo postaviti između $3r + 4$ brojeva p, k_i, n_i, α_0, α_1, α_2, q_{n_i} $(i = 1, 2, 3, \ldots, r)$, t. j. između roda plohe, brojeva, koji određuju ciklus homogene mreže i broja pojedinih njezinih elemenata.

Ponajprije je očito, da mora biti

$$\sum_{i=1}^{r} q_{n_i} = \alpha_2 , \tag{12}$$

a budući da za svaku stranicu postoje po dvije incidencije s poligonima mreže, vrijedi relacija

$$\sum_{i=1}^{r} n_i q_{n_i} = 2\,\alpha_1 . \tag{13}$$

Ako pak za neku određenu vrijednost indeksa i izbrojimo na dva moguća načina broj incidencija svih n_i-torokuta sa svim čvorištima mreže, nalazimo, da taj broj iznosi

$$\alpha_0 k_i = n_i q_{n_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{14}$$

Zbrojimo li ovdje ovih i relacija, dobivamo

$$\alpha_0 = \frac{\sum_{i=1}^{r} n_i q_{n_i}}{\sum_{i=1}^{r} k_i} . \tag{15}$$

Konačno ćemo se još obazreti na relaciju za Eulerovu karakteristiku c mreže:

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = c,$$

koju zbog relacije

$$c = 2\,(1 - p)$$

možemo pisati u obliku

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2\,(1 - p). \tag{16}$$

No relacije (12), (13), (14) i (16) (dakle u svemu $r + 3$ relacija) među sobom su nezavisne, a kako među tim veličinama nema više među sobom nezavisnih relacija, moći ćemo $(2r + 1)$-nu zgodno odabranu od tih veličina uzeti po volji, a $r + 3$ preostale veličine bit će time određene. Ako je ploha $P'(p)$ dana i ciklus C njezine homogene mreže poznat, bit će

time poznate i veličine p, n_i i k_i pa će doista brojevi α_0, α_1, α_2 i q_{n_i} biti određeni kao njihove funkcije. Imamo dakle ovaj zaključak:

S t a v a k 2. *Broj pojedinih elemenata mreže* R [C] *bilo koje plohe* P' (p) *ciklusom mreže* C *posve je određen.*

U stvari, mi ćemo spomenute brojeve odrediti na ovaj način:

Ponajprije je prema (14)

$$q_{n_i} = \alpha_0 \frac{k_i}{n_i}, \tag{17}$$

pa ako to uvrstimo u (12) i u (13), izlazi

$$\alpha_2 = \alpha_0 \sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{n_i} , \tag{18}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\,\alpha_0 \sum_{i=1}^{r} k_i . \tag{19}$$

Ako te vrijednosti za α_1 i α_2 uvrstimo u (16), dobivamo

$$\alpha_0 = \frac{2\,(p-1)}{\sum_{i=1}^{r} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - 1} . \tag{20}$$

Iz (20) i (19), odnosno (20) i (18), izlazi

$$\alpha_1 = \frac{(p-1)\sum_{i=1}^{r} k_i}{\sum_{i=1}^{r} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - 1} , \tag{21}$$

$$\alpha_2 = \frac{2\,(p-1)\sum_{i=1}^{r} \frac{k_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^{r} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - 1} , \tag{22}$$

dok je prema (17) i (20)

$$q_{n_i} = \frac{2\,\frac{k_i}{n_i}\,(p-1)}{\sum_{i=1}^{r} k_i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_i}\right)-1} \qquad (23)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ r).$$

Iz tih relacija možemo odmah izvesti neke zaključke:

Budući da su prema relacijama $(1)_{1,\,2,\,3}$ i (5) brojevi α_0, α_1 i α_2 za svaku mrežu sigurno pozitivni, razabiramo iz relacija (20), (21) i (22) da u slučaju $p = 0$ mora biti

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_i}\right) < 1, \qquad (24)$$

dok u slučajevima $p \geqq 2$ mora vrijediti relacija

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_i}\right) > 1. \qquad (25)$$

No to su upravo metrički nužni uvjeti za egzistenciju homogenih mreža ravnina sferne i eliptične geometrije, odnosno hiperbolične geometrije[7]. Da ti nužni uvjeti moraju biti i ovdje ispunjeni, iz razmatranja u prošlim paragrafima unaprijed je evidentno.

Gornji izvod relacije (20) iz (16), (18) i (19) ispravan je samo onda, ako jednadžba

$$\sum_{i=1}^{r} k_i\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n_i}\right) = 1 \qquad (26)$$

ne vrijedi. Budući da relacija (26) čini nužni uvjet za egzistenciju homogenih mreža parabolične ravnine, mora ona biti ispunjena i za homogene mreže torusa. Relacije (20), (21), (22) i (23) daju u tom slučaju neodređene izraze za brojeve α_0, α_1, α_2 i q_{n_i}, a to je u skladu s gore uočenom činjenicom, da broj pojedinih elemenata mreže nije u slučaju torusa ciklusom mreže određen.

[7] [1] relacije (14^a) i (14^c).

5. Egzistencija homogenih mreža zatvorenih orijentabilnih ploha roda većeg od jedinice

Vratimo se sada pitanju egzistencije homogenih mreža ploha $P'(p)$. Problem ćemo ovako postaviti: Neka je dana neka određena ploha $P'(p)$ i neki određeni ciklus C. Postoji li mreža $R[C]$ plohe $P'(p)$?

Jasno je iz razmatranja u § 3, da je za egzistenciju te mreže nužni uvjet, da za taj isti ciklus C postoji mreža $R[C]$ hiperbolične ravnine. Prema tome mora se zadovoljiti relacija (25), a moraju za taj ciklus postojati i čvorišta po volji visokog reda.[8]

Da to dvoje nije za egzistenciju homogene mreže neke plohe $P'(p)$ uvijek dovoljno, možemo se lako uvjeriti na posebnim slučajevima. Na pr. za ciklus druge vrste $C = [3, 4, 3, 6, 3, 8]$ homogena mreža hiperbolične ravnine sigurno postoji, jer je zadovoljena relacija (25) i jer za taj ciklus postoje dva čvorišta drugog reda, od kojih svako za se čini potpuni sistem čvorišta. Kad bi sada za taj ciklus postojale mreže $R[C]$, na pr. plohe $P(2)$, bili bi brojevi pojedinih njezinih elemenata određeni relacijama (20)—(23). No te relacije daju u ovom slučaju razlomke kao brojeve pojedinih elemenata mreže. Tako na pr. $\alpha_0 = \frac{48}{11}$ i t. d., pa kako α_0, α_1, α_2 i q_{n_i} moraju biti prirodni brojevi, očevidno je, da ta pretpostavka nije moguća.

Na isti način uviđamo, da za taj isti ciklus homogena mreža nije moguća u slučajevima $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, \ldots$, jer za sve te vrijednosti od p relacije (20)—(23) daju razlomke za brojeve pojedinih elemenata mreže. No u slučajevima $p = 12, 23, 34, \ldots$ veličine α_0, α_1, α_2 i q_{n_i} poprimaju vrijednosti prirodnih brojeva, pa u tim slučajevima mogućnost egzistencije mreže $R[C]$ nije isključena.

Od ciklusa, koji pripadaju mogućim homogenim mrežama hiperbolične ravnine, možemo na taj način isključiti — kao nemoguće za homogenu mrežu neke plohe $P'(p)$ — sve one cikluse, za koje relacije (20)—(23) ne daju cjelobrojne vrijednosti za brojeve elemenata mreže. Ciklusi mogućih homogenih mreža bit će tada sadržani među onim ciklusima, za koje te relacije daju cjelobrojne vrijednosti. Štaviše, čini se, da bi mogućnost egzistencije neke homogene mreže plohe $P'(p)$ mogla biti određena ovim uvjetom:

[8] [1] §§ 8, 9.

S t a v a k 3. *Ako za neki ciklus* C *postoji homogena mreža hiperbolične ravnine, a osim toga za taj ciklus* C *i neki dani prirodni broj* $p \geqq 2$ *relacije (20)—(23) daju veličinama* α_0, α_1, α_2 i q_{n_i} *cjelobrojne vrijednosti, onda za taj ciklus* C *postoji i homogena mreža plohe* P' (p).

Ovaj je stavak hipotetičke prirode, jer dosad još nisam našao dokaza za tu tvrdnju, ali mi se ona čini vrlo vjerojatna, jer u velikom broju konkretnih slučajeva za cikluse, koji zadovoljavaju gornji uvjet, nije bilo teško konstruirati mrežu $R\,[C]$ plohe $P'\,(p)$. Tako je na pr. u najjednostavnijem slučaju, t. j. u slučaju $p = 2$, $r = 1$ moguće nacrtati mrežu $R\,[C]$ plohe $P\,(2)$, za svaki pojedini od dvadeset i pet slučajeva (vidi § 6.) ciklusa, koji ispunjavaju uvjete stavka 3., a u složenijim slučajevima, gdje se ne može tako lako uočiti struktura mreže, čini mi se, da se ne može ni uvidjeti njezina nemogućnost.

Prema tome važno je razabrati, u kojim će slučajevima relacije (20)—(23) dati za brojeve α_0, α_1, α_2 i q_{n_i} cjelobrojne vrijednosti. Možemo odmah primijetiti, da je ovdje dovoljno ispitati samo relacije (20) i (23), jer ako su svi q_{n_i} cijeli brojevi, onda zbog (12) to isto vrijedi i za α_2, a ako su α_0 i α_2 cijeli brojevi, onda je zbog (16) i α_1 cio broj.

Ako je sada dan neki ciklus C, bit će time brojevi r, n_i i k_i određeni. Neka je onda

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - 1 = \frac{a}{b},$$

gdje su a i b dva prirodna relativno prosta broja, onda će prema (20) i (23) biti α_0 i q_{n_i} (a time i α_1, α_2) cijeli brojevi samo onda, ako za broj $p > 1$ vrijedi $(r+1)$-na kongruencija.

$$\begin{aligned} 2\,(p-1) &\equiv 0, \pmod{a}, \\ 2\,b\,k_i\,(p-1) &\equiv 0, \pmod{a\,n_i}. \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned} \tag{27}$$

Odatle neposredno razabiramo, da će se u svakom slučaju moći odrediti broj $p > 1$ tako, da te kongruencije budu zadovoljene, t. j. ako pretpostavimo, da stavak 3. doista vrijedi, tada možemo reći:

S t a v a k 4. *Za svaki ciklus, koji pripada nekoj mogućoj homogenoj mreži hiperbolične ravnine, može se odrediti rod* p *plohe* P' (p) *za koju mreža* R [C] *postoji.*

Pokazat ćemo nadalje, da vrijedi ovaj stavak:

S t a v a k 5. *Ako je* p_1 *najmanji od brojeva većih od jedinice, koji zadovoljavaju kongruencije (27), onda je*

$$p_\nu = \nu\,p_1 - \nu + 1 \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots) \tag{28}$$

opće rješenje sistema (27).

Da je (28) doista rješenje sistema (27), odmah se razabira. Da ne može biti rješenja, koje nije u (28) sadržano, možemo se ovako uvjeriti: Ponajprije je sigurno, ako su p' i p'' dva rješenja sistema (27), gdje je $1 < p' < p''$, onda je uvijek i

$$p = p'' - p' + 1 \tag{29}$$

jedno rješenje toga sistema. Uzmimo zatim, da postoji jedno rješenje $\overline{p}$, koje nije u (28) sadržano, tada ono mora ležati između dva susjedna rješenja iz (28), t. j. mora biti za neki određeni broj ν_0

$$\nu_0\,p_1 - \nu_0 + 1 < \overline{p} < (\nu_0 + 1)\,p_1 - \nu_0$$

ili

$$1 < \overline{p} - \nu_0\,p_1 + \nu_0 < p_1. \tag{30}$$

Budući da su po pretpostavci brojevi $\nu_0\,p_1 - \nu_0 + 1$ i $\overline{p}$ dva rješenja sistema (27), to je prema (29) i broj $\overline{p} - \nu_0\,p_1 + \nu_0$ rješenje tog sistema, a prema (30) bi on bio manji od najmanjeg rješenja p_1, a to je dakako nemoguće, pa je time tvrdnja stavka dokazana.

No sada možemo još više pokazati, jer vrijedi idući stavak:

S t a v a k 6. *Ako je* $p = p_1$ *najmanji broj, za koji postoji uz neki određeni ciklus* C *mreža* R [C] *plohe* P' (p), *tada postoje za isti taj ciklus homogene mreže svih onih plohâ* $P'\,(p_\nu)$, *gdje je* $p_\nu = \nu\,p_1 - \nu + 1$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, *dok za taj ciklus* C *ne postoje homogene mreže preostalih ploha* P' (p).

Da za taj ciklus ne mogu postojati homogene mreže preostalih ploha $P'\,(p)$, izlazi iz stavka 5., a da te mreže ploha $P'\,(p_\nu)$ doista postoje, dokazat ćemo ovako:

Uzmimo da postoji mreža $R\,[C]$ plohe $P'\,(p_1)$, pa neka je $P'\,(p'_\nu)$ jedna ν-struka nerazgranata ploha pokrivanja plohe $P'\,(p_1)$. Budući da je svaka točka plohe $P'\,(p_1)$ ν-struko preslikana na plohu $P'\,(p'_\nu)$, tim će preslikavanjem biti prenesena na plohu $P'\,(p'_\nu)$ i mreža $R\,[C]$.

Ako su sada α_0, α_1 i α_2, odnosno α_0', α_1', α_2' brojevi pojedinih elemenata mreža $R\,[C]$ plohe $P\,(p_1)$, odnosno plohe $P'(p_\nu')$, onda zbog (16) mora biti

$$2\,(1-p_\nu') = \alpha_0' - \alpha_1' + \alpha_2' = \nu\alpha_0 - \nu\alpha_1 + \nu\alpha_2 = \nu \cdot 2\,(1-p_1),$$

t. j.

$$p_\nu' = \nu\,(p_1 - 1) + 1 = p_\nu,$$

pa je tako stavak dokazan.

Iz tog stavka možemo odmah zaključiti: Ako je za neki ciklus C na pr. p_1 jednako 2, t. j. ako je mreža $R\,[C]$ moguća na plohi $P\,(2)$, onda je uvijek moguća i na svim ostalim plohama $P'\,(p)$, a ako je za neki ciklus C na pr. p_1 jednako 12, mreže $R\,[C]$, bit će moguće samo na plohama $P'\,(p)$, gdje je $p = 12, 23, 34, \ldots$, i t. d.

Kako se u slučaju $\nu > 1$ može ploha $P\,(p_\nu)$ realizirati kao ν-struka ploha pokrivanja plohe $P\,(p_1)$ na više različitih načina i to tako, da dvije homeomorfne plohe $P\,(p_\nu)$, kao plohe pokrivanja, budu različite, t. j. da se ne daju jedna na drugu topološki tako preslikati, da bilo koje dvije pridružene točke »pokrivaju« jednu istu točku osnovne plohe $P\,(p_1)$, mogu po dvije mreže $R\,[C]$ jedne iste plohe $P'\,(p)$ biti anizomorfne. Prema tome postoji i općenito mogućnost, da dvije mreže $R\,[C]$ neke plohe $P'\,(p)$ ne budu izomorfne, makar uz isti ciklus C moraju imati isti broj pojedinih elemenata.

Slično kao i kod torusa postoji i kod ploha $P'\,(p)$ neizmjerno mnogo klasa takvih topoloških preslikavanja plohe $P'\,(p)$ na samu sebe, koja ne mogu prijeći dodavanjem neke obične deformacije plohe $P'\,(p)$ jedna u druge. Zato će i kod homogenih mreža ploha $P'\,(p)$ postojati svakoj takvoj mreži neizmjerno mnogo njih, koje su s njom izomorfne, ali nisu homotopne.

6. Neki slučajevi homogenih mreža ploha $P'\,(p)$

Promotrit ćemo sada neke slučajeve homogenih mreža ploha $P'\,(p)$. Poći ćemo pritom od najjednostavnijeg slučaja, kad je $r = 1$, t. j. kad su svi poligoni homogene mreže istovrsni. Izostavimo li u tom slučaju brojevima k_1 i n_1 indekse, tada mjesto jednadžbi (20), (21) i (22) dobivamo ove jednostavnije relacije.

$$\alpha_0 = \frac{4n\,(p-1)}{kn - 2k - 2n}, \tag{31}$$

$$\alpha_1 = \frac{2kn\,(p-1)}{kn - 2k - 2n}, \tag{32}$$

$$\alpha_2 = \frac{4k\,(p-1)}{kn - 2k - 2n}, \tag{33}$$

koje u slučaju $p = 0$ prelaze u poznate relacije za pravilne poliedre[9].

Kako među šest veličina α_0, α_1, α_2, k, n, p postoje tri nezavisne relacije, može se svaka od tih veličina izraziti s bilo koje tri odabrane od preostalih. Od svih tako mogućih relacija uzmimo ove dvije:

$$n = \frac{2k\alpha_0}{(k-2)\,\alpha_0 - 4\,(p-1)}, \tag{34}$$

$$k = \frac{2n\alpha_2}{(n-2)\,\alpha_2 - 4\,(p-1)}, \tag{35}$$

koje izlaze iz (31), odnosno (33). Uz pomoć tih relacija možemo naime odrediti ograde za moguće vrijednosti brojeva k i n, i to ovako:

Ponajprije iz (34) zbog relacija (3) i $(1)_1$ izlazi

$$k \leqq 6\,(2p-1). \tag{36}$$

A zatim, budući da je sada $s = k$, na sličan način iz (35) zbog relacija (2) i $(1)_3$ izlazi

$$n \leqq 6\,(2p-1). \tag{37}$$

Uzmimo sada najprije slučaj $p = 2$. Tada je prema (2) i (36) odnosno prema (3) i (37)

$$\begin{aligned} 3 \leqq k \leqq 18, \\ 3 \leqq n \leqq 18. \end{aligned} \tag{38}$$

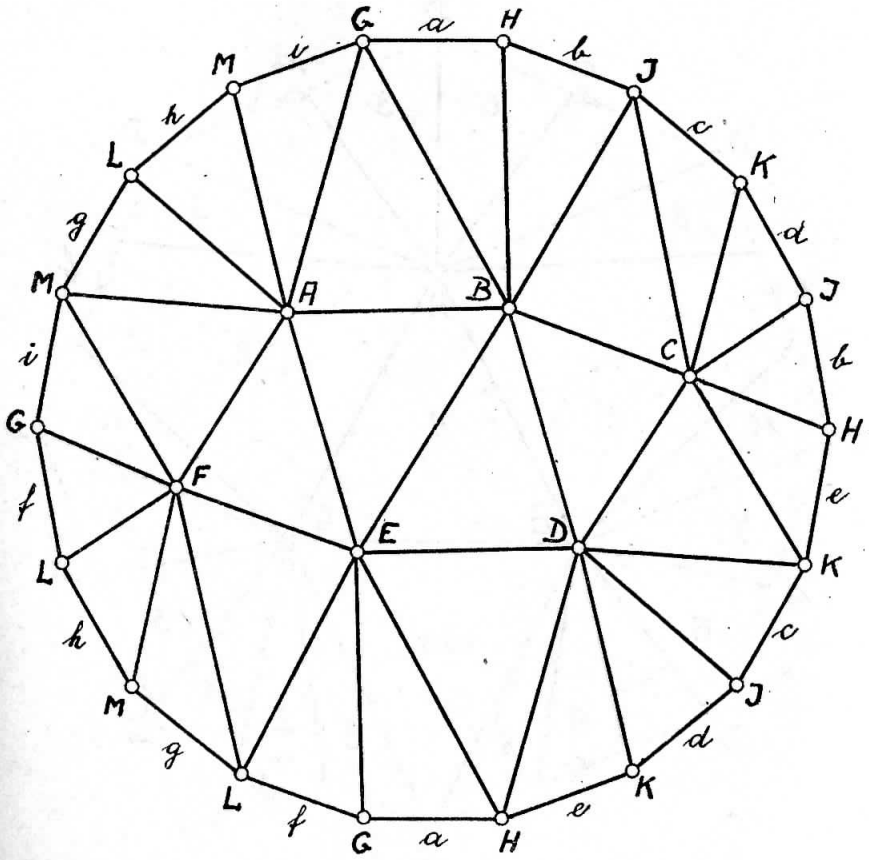
Treba dakle potražiti sve one cijele brojeve k i n iz intervala (38), koji daju prema relacijama (31), (32) i (33) prirodne vrijednosti za brojeve pojedinih elemenata mreže. Na taj način dobivamo u svemu 25 diofantskih rješenja tih relacija, sadržanih u tablici (39).

[9] Vidi na pr.: H. S. M. Coxeter [4], str. 13. i 14.

	p	n	k	α_0	α_1	α_2	
I	2	3	7	12	42	28	sl. 3.
II			8	6	24	16	
III			9	4	18	12	sl. 4.
IV			10	3	15	10	
V			12	2	12	8	
VI			18	1	9	6	
VII		4	5	8	20	10	
VIII			6	4	12	6	
IX			8	8	8	4	
X			12	1	6	3	
XI		5		10	20	8	sl. 6.
XII			5	4	10	4	
XIII			10	1	5	2	
XIV		6	4	6	12	4	
XV			6	2	6	2	sl. 7.
XVI		7	3	28	42	12	sl. 5.
XVII		8	3	16	24	6	
XVIII			4	4	8	2	
XIX			8	1	4	1	
XX		9	3	12	18	4	
XXI		10	3	10	15	3	
XXII			5	2	5	1	
XXIII		12	3	8	12	2	
XXIV			4	3	6	1	
XXV		18	3	6	9	1	sl. 8.

(39)

Pripadni ciklusi mreže za sva ta rješenja jesu prve vrste i to simetrični tipa M. Prema tome za te cikluse postoje homogene mreže hiperbolične ravnine. No za svako pojedino od tih rješenja nije teško pokazati da se može konstruirati i pripadna

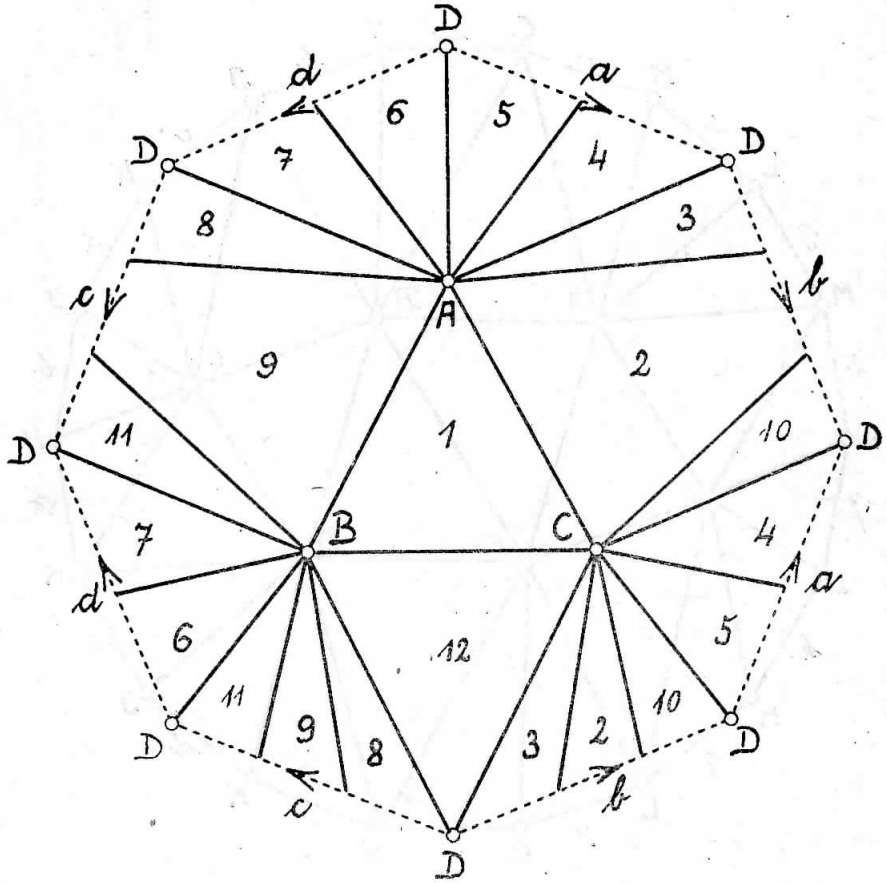


Sl. 3.

mreža $R\,[C]$ plohe $P\,(2)$. Prema tome postoji 25 homogenih mreža plohe $P\,(2)$ s istovrsnim poligonima.

Iz tablice (39) odmah razabiramo, da je među tim mrežama jedanaest parova među sobom recipročnih, tako na pr. mreže I i XVI; II i XVII i t. d., dok su mreže XII, XV i XIX same sebi recipročne.

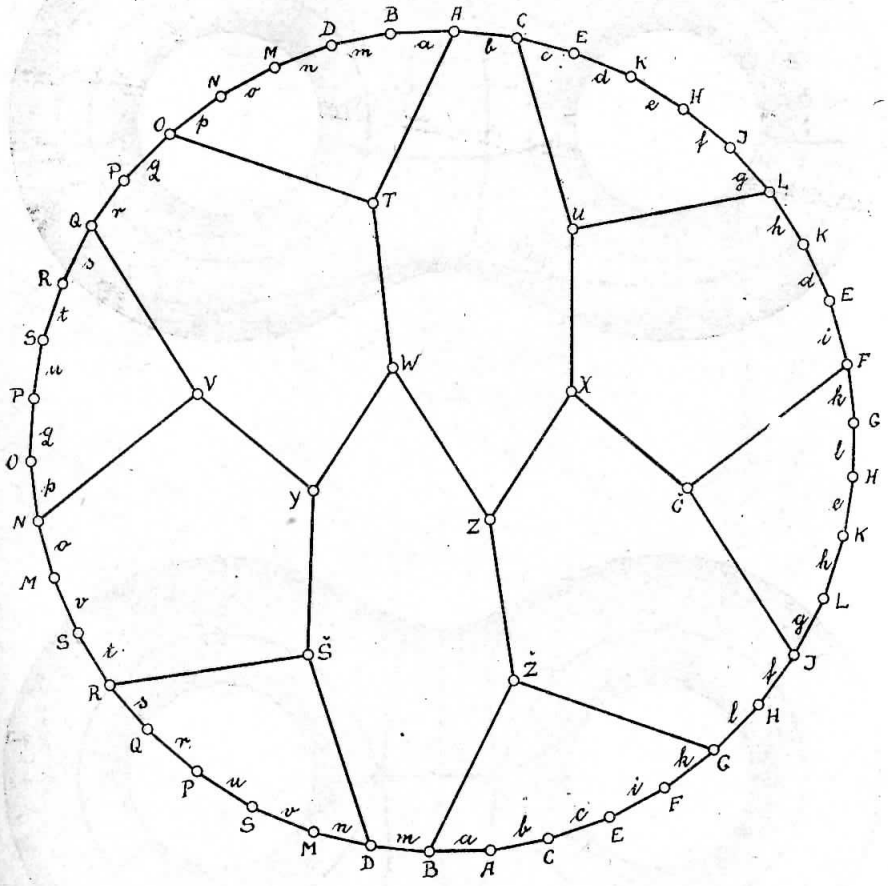
U sl. 3.—8. dani su crteži nekoliko karakterističnih slučajeva tih mreža, i to: sl. 3. predočuje mrežu R [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3], a sl. 5. mrežu R [7, 7, 7], obje razrezane sa četiri zatvorena prereza duž stranica mreže u jedno jednostavno-suvislo po-



Sl. 4.

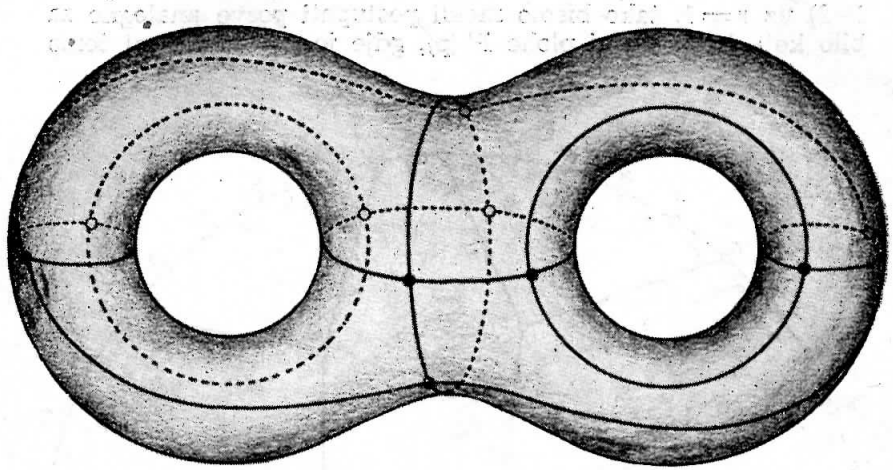
družje; sl. 4. predočuje mrežu R [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3] u »kanonskom razrezu« plohe P (2), gdje sve crte prereza prolaze jednim čvorištem mreže, ali ne idu duž stranica mreže; napokon slike 6., 7. i 8. prikazuju redom mreže R [5, 5, 5, 5], R [6, 6, 6, 6, 6, 6] i R [18, 18, 18].

Kako smo ovdje ispitali mogućnost homogenih mreža plohe P (2) uz $r = 1$, tako bismo mogli postupati posve analogno za bilo koji drugi slučaj plohe P' (p), gdje je $p > 2$. No mi ćemo

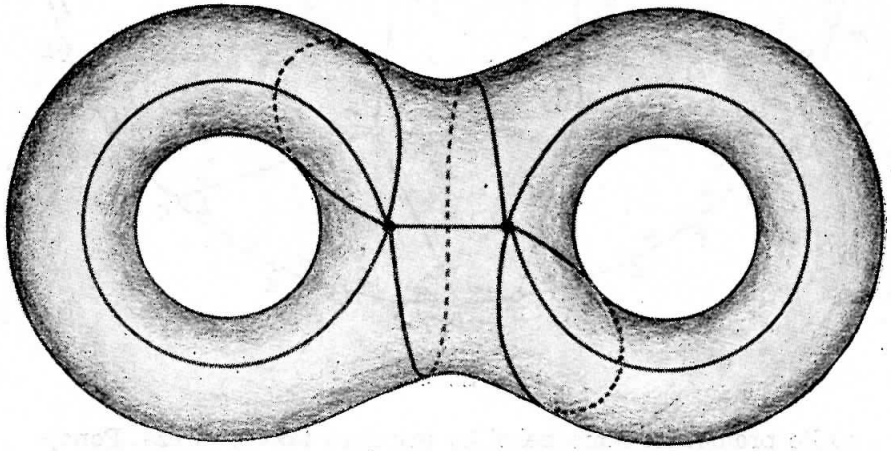


Sl. 5.

ovdje promotriti samo nekoliko primjera takvih mreža. Ponajprije je jasno iz prošlog razmatranja, da su za svih dvadeset i pet slučajeva ciklusa prema rješenjima iz tablice (39), za koje su moguće homogene mreže plohe P (2), takve mreže moguće i u svakom slučaju gdje je $p > 2$. Uzmimo kao primjer slučaj



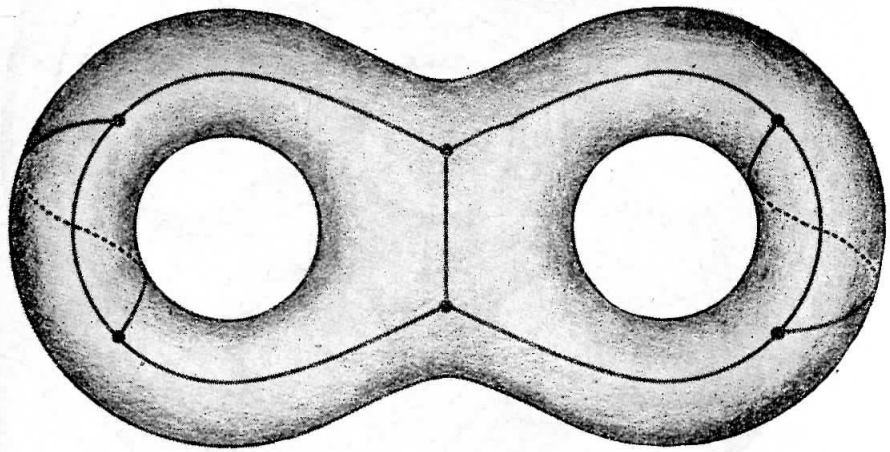
Sl. 6.



Sl 7.

VIII. tablice (39), t. j. ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Tada je prema (31) i (33) $\alpha_0 = 4(p-1)$; $\alpha_2 = 6(p-1)$, dakle postoji mogućnost te mreže za svako $p \geqq 2$. U slici 9. predočena je mreža $R\,[4, 4, 4, 4, 4, 4]$ plohe P (7).

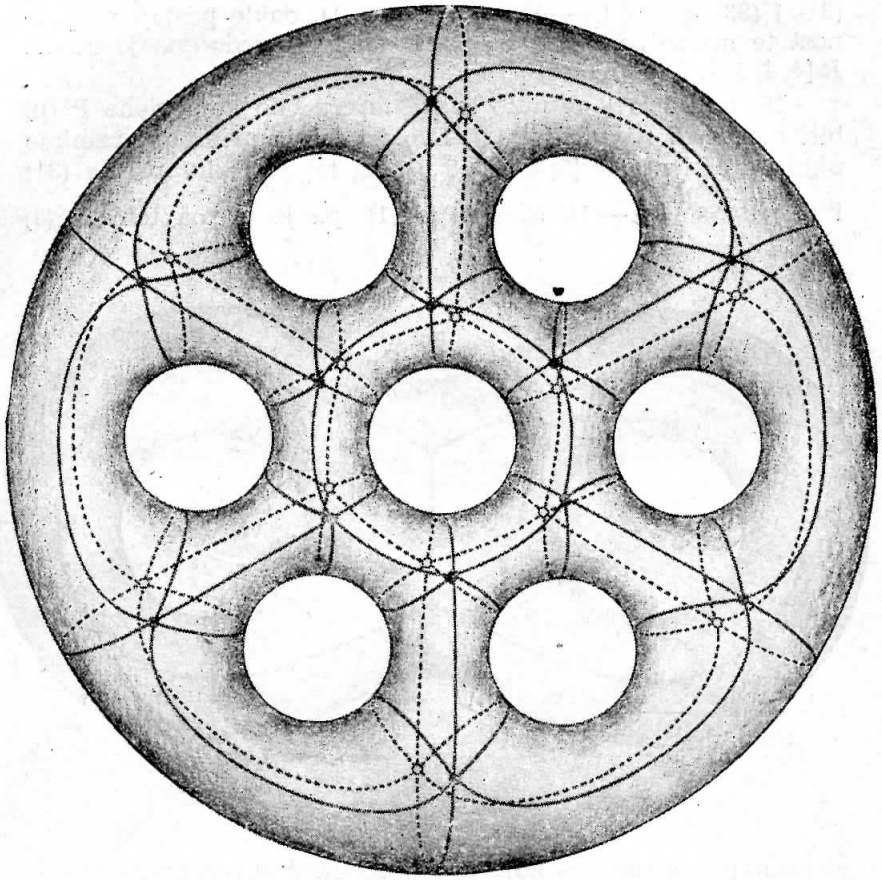
No ne mora i obrnuto svaka mreža bilo koje plohe $P'(p)$ biti moguća i na plohi P (2). Evo tri takva primjera: uzmimo najprije ciklus $C \equiv [5, 5, 5, 5, 5, 5]$. Za taj je ciklus prema (31) i (33) $\alpha_0 = \frac{5}{2}(p-1)$, $\alpha_2 = 3(p-1)$, pa je prema tome P (3)



Sl. 8.

ploha najnižeg roda, za koju postoji mogućnost homogene mreže s tim ciklusom. Ta je mreža predočena na sl. 10. Kao drugi primjer uzmimo ciklus $C \equiv [6, 6, 6, 6, 6]$. Sada je $\alpha_0 = 3(p-1)$, $\alpha_2 = \frac{5}{2}(p-1)$, pa je i ta mreža moguća na plohi P (3) i u sl. 11. je ona prikazana. Te su dvije posljednje mreže među sobom recipročne. Promotrimo napokon ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Sada je $\alpha_0 = \frac{8}{3}(p-1)$, $\alpha_2 = \frac{14}{3}(p-1)$, pa prema tome za taj ciklus postoji mogućnost homogene mreže istom na plohi P (4). Ta je mreža predočena u sl. 12.

Prijeđimo sada na slučajeve $r > 1$. Promotrit ćemo ovdje četiri jednostavna primjera takvih mreža. Uzmimo najprije

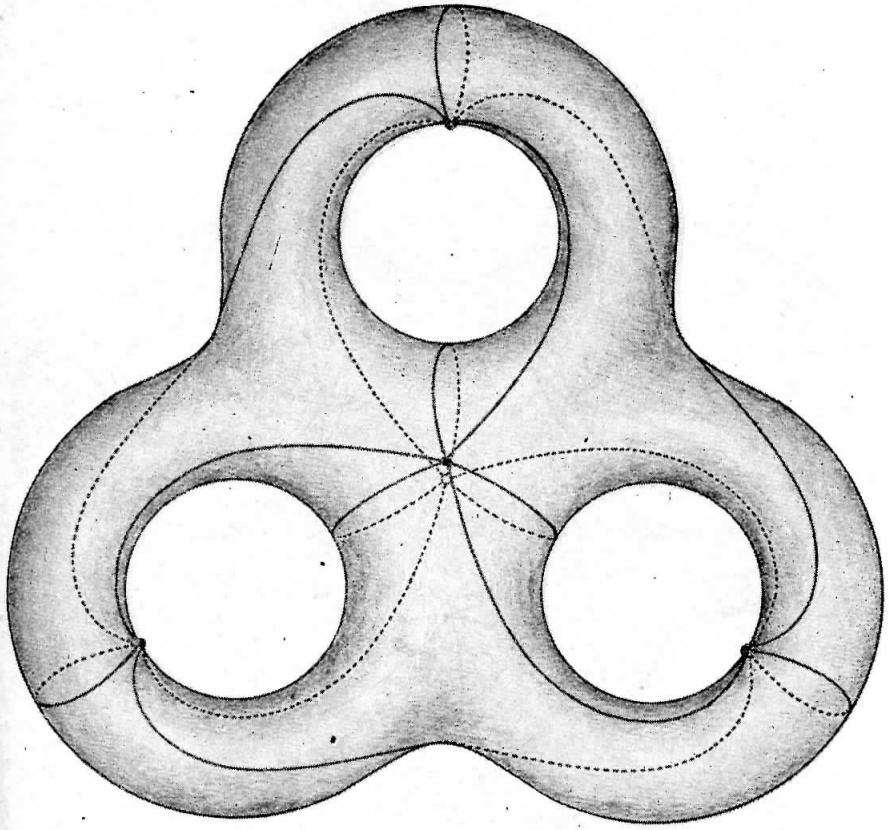


Sl. 9.

ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 5]$. Pokazalo se, da za taj ciklus druge vrste postoji barem jedna homogena mreža hiperbolične ravnine[10]. Budući da je u tom slučaju prema (20) i (23)

$$\alpha_0 = 40\,(p-1),$$
$$q_4 = 30\,(p-1), \quad q_5 = 8\,(p-1),$$

[10] [1], str. 99.



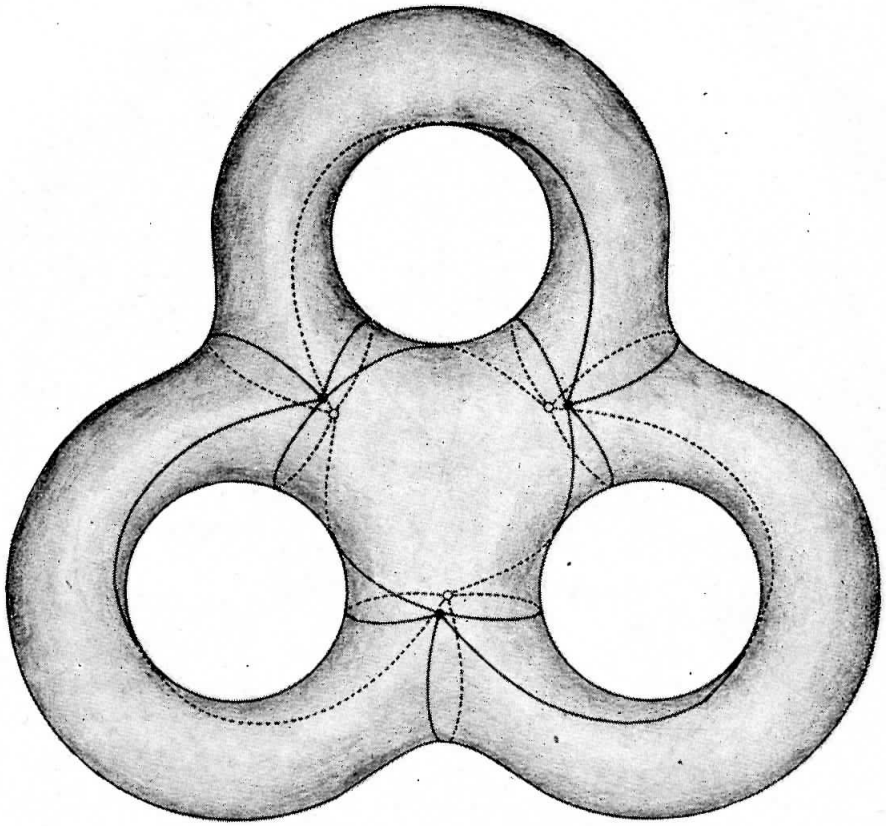
Sl. 10.

postoji za taj ciklus mogućnost homogene mreže ploha $P'(p)$ za svako p. Na slici 13. nalazi se crtež mreže $R[4, 4, 4, 5]$ plohe $P(2)$.

Za ciklus druge vrste tipa $C \equiv [3, 3, n, 3, n]$ postoji za svako $n \geqq 5$ jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. U tom slučaju relacije (20) i (23) daju

$$\alpha_0 = \frac{4n\,(p-1)}{n-4},$$

$$q_3 = \frac{4n\,(p-1)}{n-4}, \qquad q_n = \frac{8\,(p-1)}{n-4}.$$



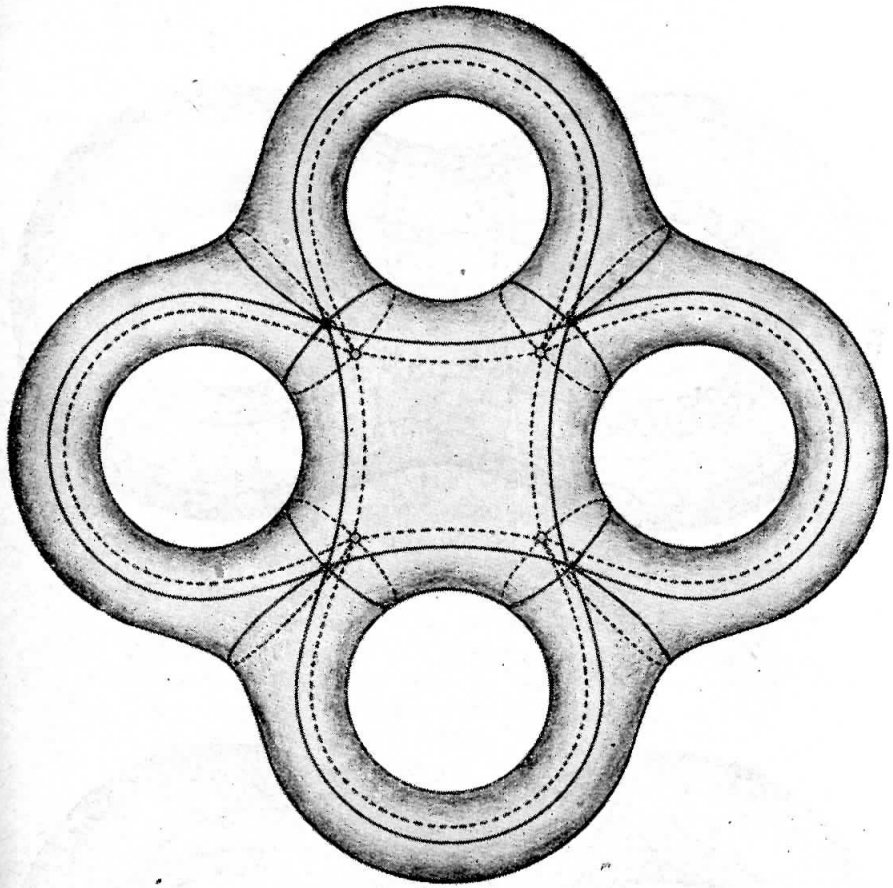
Sl. 11.

Odatle razabiremo, da na pr. za $n = 6$ postoji mogućnost homogene mreže bilo koje plohe $P'(p)$. Crtež na sl. 14. prikazuje mrežu $R[3, 3, 6, 3, 6]$ plohe $P(2)$.

Za ciklus prve vrste $C = [5, 6, 5, 6]$ ima jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. Budući da je sada

$$\alpha_0 = \frac{15}{2}(p-1), \quad q_5 = 3(p-1), \quad q_6 = \frac{5}{2}(p-1),$$

postoji za taj ciklus mogućnost homogenih mreža na plohama roda $p = 3, 5, 7, \ldots$. Takva je mreža za slučaj $p = 3$ prikazana na sl. 15.



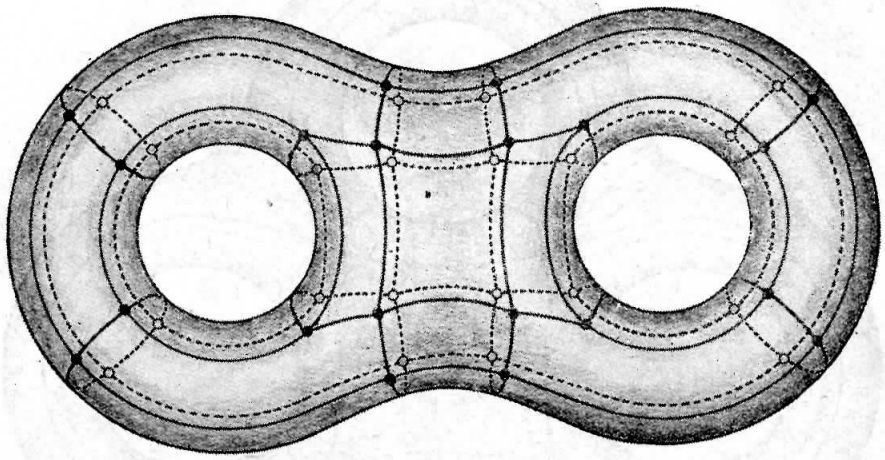
Sl. 12.

Kao posljednji primjer uzmimo ciklus prve vrste $C = [4, 5, 4, 6]$. Za njega postoji jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. Sada je

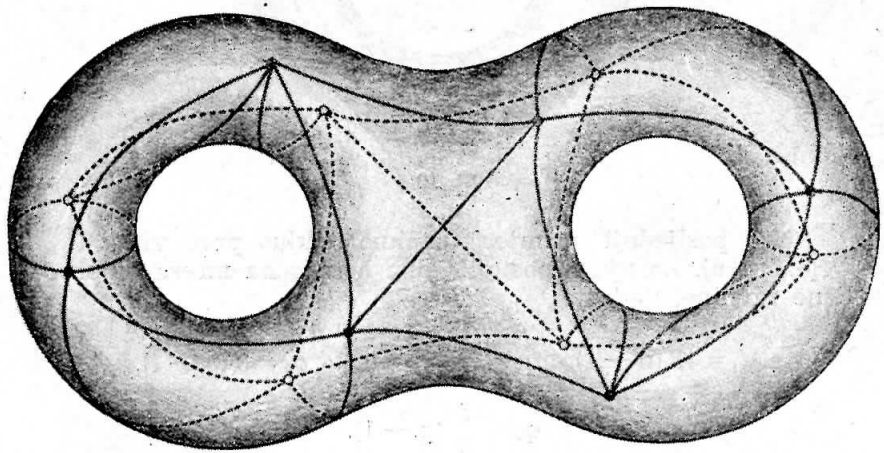
$$\alpha_0 = 15(p-1), \quad q_4 = \frac{15}{2}(p-1), \quad q_5 = 3(p-1),$$

$$q_6 = \frac{5}{2}(p-1).$$

I za taj ciklus postoji dakle mogućnost homogenih mreža za plohe roda $p = 3, 5, 7, \ldots$. Primjer takve mreže za $p = 3$ nalazi se na sl. 16.



Sl. 13.



Sl. 14.

7. Broj mogućih homogenih mreža ploha $P'(p)$

Za homogene mreže kugline plohe ($p = 0$) u slučaju $r = 1$ daju relacije (31), (32) i (33) samo 5 diofantskih rješenja, pa zato i ima samo 5 regularnih, Platonovih tjelesa. No u slučaju $p = 0$, $r > 1$ nalaze se među cjelobrojnim rješenjima jednadžbi (20), (21) i (22) i ova:

	k_1	n_1	k_2	n_2	α_0	α_1	α_2
I	2	4	1	n	$2n$	$3n$	$n+2$
II	3	3	1	n	$2n$	$4n$	$2n+2$

koja odgovaraju mrežama n-terostrane prizme i antiprizme, dakle i ta dva tijela pripadaju u Arhimedova polupravilna tjelesa. Za n možemo ovdje uzeti bilo koji prirodni broj veći od 2. Prema tome ima neizmjerno mnogo homogenih mreža kugline plohe.

Vidjeli smo, da postoji doduše samo konačan broj ciklusa, za koje su homogene mreže torusa moguće. No za jedan isti ciklus ima neizmjerno mnogo homogenih mreža, koje nisu među sobom izomorfne, a i po broju elemenata se razlikuju.

Kako broj ciklusa, za koje su moguće homogene mreže hiperbolične ravnine, nije ograničen, moglo bi se možda pomisliti, da će biti neizmjerno mnogo i homogenih mreža neke plohe $P'(p)$. Ali nije tako. Pokazat ćemo naime, da vrijedi:

S t a v a k 7. *Za neku određenu plohu* P' (p) *ne može postojati više nego konačni broj (koji uostalom ovisi o* p*) homogenih mreža, koje nisu među sobom izomorfne.*

Za dokaz ovog stavka trebat će nam ovaj gotovo evidentni pomoćni stavak.

S t a v a k 8. *Bilo koje rješenje* $p, r, k_i, n_i, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, q_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *relacija (20) — (23) odgovara najviše konačnom broju mogućih homogenih mreža plohe* P (p), *koje nisu među sobom izomorfne.*

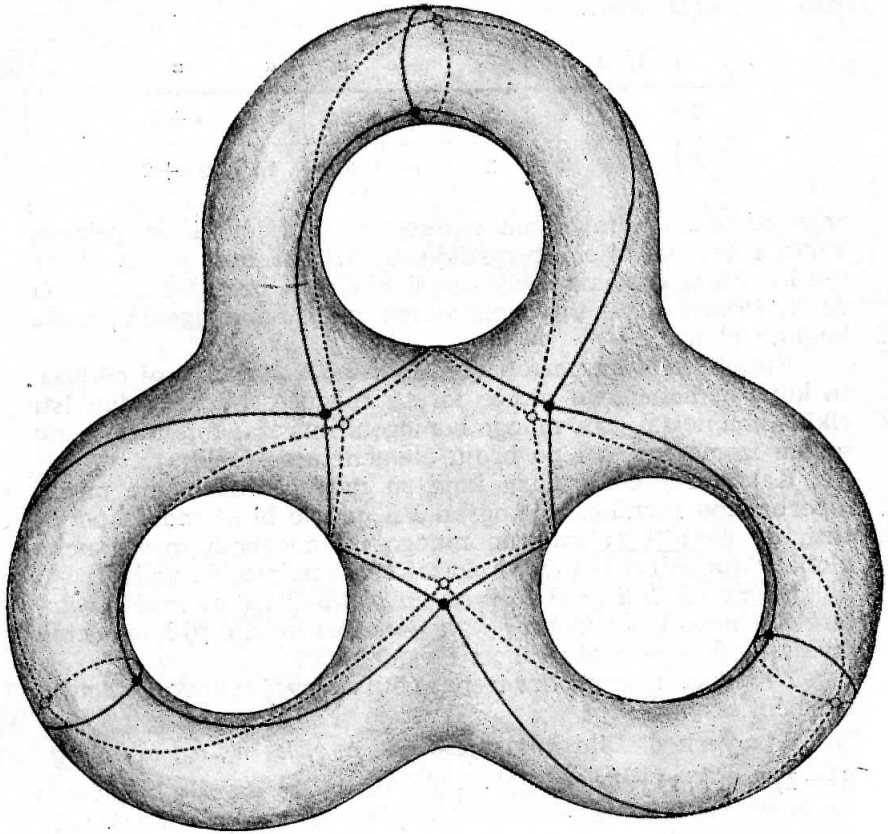
Dokaz te tvrdnje izlazi odmah iz činjenice, da u konačnom skupu od $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ elemenata može postojati najviše konačan broj međusobno različitih mogućnosti relacija incidencije među elementima različitih vrsta.

Preostaje samo još da se dokaže:

S t a v a k 9. *Ako je dan bilo koji broj* $p \geqq 2$, *tada uz uvjet, da vrijede nejednadžbe (1) — (5), postoji najviše konačan broj diofantskih rješenja relacija (20), (21), (22) i (23).*

Stavak 7. je tada neposredna posljedica stavaka 8. i 9. Dokazat ćemo sada dakle stavak 9.

Ako je $r = 1$, onda su uz dano p brojevi k i n prema relacijama (36) i (37) ograđeni, dakle može postojati samo konačni broj parova k, n, koji dolaze u obzir, a kako su sa k, n i p



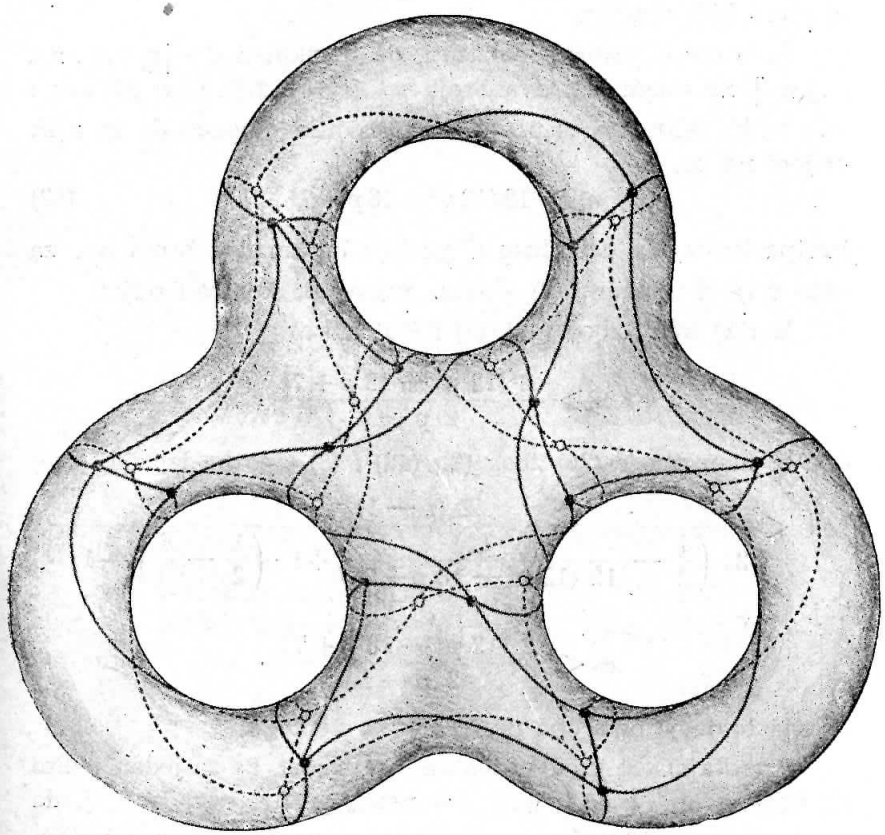
Sl. 15.

brojevi a_0, a_1 i a_2 već određeni, ispravnost tvrdnje stavka je u tom slučaju očita. No pokazat ćemo, da isto vrijedi i bez obzira na to, koliko različitih brojeva n_i ciklus mreže sadržava, dakle za svaku vrijednost broja r.

Pokazat ćemo najprije, da je za neku danu vrijednost od p broj s, t. j. broj svih članova ciklusa ograđen:

Budući da je zbog relacije (25) u desnoj strani jednadžbe (20) nazivnik pozitivan, možemo iz nje na osnovi relacija $(1)_1$ i (3) zaključiti, da je uvijek

$$\sum_{i=1}^{r} k_i \leqq 6\,(2\,p-1),$$



Sl. 16.

pa je onda zbog (2)

$$3 \leqq s \leqq 6\,(2\,p-1). \tag{40}$$

Prema tome i u općem slučaju ciklus homogene mreže, na pr. plohe P (2) ne može sadržavati više od 18 članova.

Zbog (40) su i brojevi k_i ograđeni, dakle prema (4) mora biti

$$1 \leqq k_i \leqq 6\,(2\,p-1) \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ r). \tag{41}$$

No uvjerit ćemo se, da za svako p i skup mogućih brojeva n_i mora biti ograđen.

Zato ćemo najprije pokazati, da u ciklusu $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \ldots, n_{i_s}]$ ne mogu biti dva broja n_{i_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ (ili čak i više njih) relativno vrlo velika; tako nije moguće da za njih vrijedi na pr.

$$n_{i_\nu} > 12\,(12\,p^2 - 18\,p + 7). \tag{42}$$

Pretpostavka, da u ciklusu C postoje barem dva broja n_{i_ν}, za koje vrijedi relacija (42), dovodi naime do kontradikcije:

Iz (15) mora zbog (42), (5) i (40) izlaziti

$$\alpha_0 > \frac{2\,(12\,p^2 - 18\,p + 7)}{2\,p - 1},$$

dok bi naprotiv iz (20) zbog (2), (42) i (3) sigurno izlazilo

$$\alpha_0 < \frac{2\,(p-1)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12\,(12\,p^2 - 18\,p + 7)}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 1},$$

t. j.

$$\alpha_0 < \frac{2\,(12\,p^2 - 18\,p + 7)}{2\,p - 1}.$$

Prema tome je učinjena pretpostavka nemoguća.

Preostajala bi još eventualna mogućnost, da za jedan jedini od brojeva n_{i_ν} $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ nema gornje ograde, t. j. da uz svaki, po volji veliki, zadani broj n_0 postoji uz dani broj p rješenje sistema (20) — (23), kod kojega je jedan od brojeva n_{i_ν} veći od n_0.

Označimo sada brojeve n_{i_ν} tako, da je onaj jedini od njih — za koji još ne znamo, da li je ograđen ili nije — označen sa n_r (pa je prema tome $k_r = 1$), dok će preostali — ograđeni — brojevi biti označeni sa $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$.

Prema (20) je tada

$$\alpha_0 = \frac{2\,(p-1)}{\sum_{i=1}^{r} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - 1} =$$

$$= \frac{2\,(p-1)}{\sum_{i=1}^{r-1} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n_r}} = \frac{2\,(p-1)}{A - \frac{1}{n_r}}, \tag{43}$$

gdje je kraće označeno

$$\sum_{i=1}^{r-1} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i}\right) - \frac{1}{2} = A. \tag{44}$$

Uz uvjete (2) i (3) uvijek je $A > 0$ s jedinim izuzetkom od 6 diofantskih rješenja relacije $A \leqq 0$. No vrijednosti od A, koje nisu pozitivne, ne dolaze u obzir za rješenja relacije (43), jer bi tada bilo $\alpha_0 < 0$.

Budući da brojevi k_i moraju biti iz intervala (41) i mora pri tom vrijediti i relacija (40), dok nizovi brojeva $n_1, n_2, \ldots, n_{r-1}$ $(1 < r \leqq s)$ mogu biti samo neke od kombinacija (bez ponavljanja) $(r-1)$-vog razreda od brojeva $3, 4, 5, \ldots, 12\,(12p^2 - 18\,p + 7)$, jasno je, da izraz A prema (44) može poprimiti samo konačni broj vrijednosti $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$. Neka je sa A_m označena najmanja pozitivna od tih vrijednosti.

Pretpostavka, da broj n_r za bilo koju vrijednost od p nije ograničen, dovodila bi sada do kontradikcije.

Uzmimo naime, da broj n_r nije ograničen, nego da postoji za bilo koju vrijednost od p beskonačni niz rješenja relacije (20), t. j. beskonačni niz skupova brojeva

$$\alpha_0^\lambda,\ r^\lambda,\ k_1^\lambda,\ k_2^\lambda,\ \ldots,\ k_{r^\lambda-1}^\lambda,\ k_{r^\lambda}^\lambda,\ n_1^\lambda,\ n_2^\lambda,\ \ldots,\ n_{r^\lambda-1}^\lambda,\ n_{r^\lambda}^\lambda,$$

gdje je $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ gornji indeks, pa neka je

$$\lim_{\lambda \to \infty} n_{r^\lambda}^\lambda = \infty,$$

dok je

$$k_{r^\lambda}^\lambda = 1, \tag{45}$$

tada bi bilo moguće odabrati broj λ_0 tako, da je vrijednost od $n_{r^{\lambda_0}}^{\lambda_0}$ po volji velika, na pr. da je

$$n_{r^{\lambda_0}}^{\lambda_0} > \frac{2\,p-1}{A_m}. \tag{46}$$

No to je nemoguće, jer bi prema (14) zbog (5) i (40) bilo

$$\alpha_0 \geqq n_{r\lambda_0}^{\lambda_0},$$

pa onda radi (46) izlazi

$$\alpha_0 > \frac{2p-1}{A_m},$$

dok bi opet prema (43) i (46) bilo

$$\alpha_0 = \frac{2(p-1)}{A - \frac{1}{n_{r\lambda_0}^{\lambda_0}}} < \frac{2(p-1)}{A_m - \frac{A_m}{2p-1}}$$

dakle

$$\alpha_0 < \frac{2p-1}{A_m},$$

a time je nemogućnost učinjene pretpostavke očita.

Prema tome je doista skup svih mogućih brojeva n_i za svaku vrijednost od p ograđen.

Budući da je dakle zbog $1 \leqq r \leqq s$ i zbog (40) broj r ograđen, a pokazalo se, da su i moguće vrijednosti brojeva $k_1, k_2, \ldots, k_r, n_1, n_2, \ldots, n_r$ ograđene, može postojati samo konačni broj kombinacija tih brojeva, pa je zato ujedno i broj mogućih rješenja sistema jednadžbi (20) do (23) sigurno konačan. Tako je i stavak 9. dokazan.

LITERATURA

[1] BILINSKI, Homogene mreže ravnine, Rad Jugoslavenske akademije, knjiga 271, 1948, 145—255.

[2] COXETER, Regular skew polyhedra in three and four dimensions, and their topological analogues, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 43, 1937, 33—62.

[3] COXETER, The abstract groups $G^{m,n,p}$, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 45., No. 1, 1939, 73-150.

[4] COXETER, Regular Polypotes, London 1948.

[5] COXETER, Configurations and Maps, Reports of a Mathematical Colloquium, II. Ser., Issue 8, 1949, 18—38.

[6] HEESCH, Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen, Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1932, 268—273.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 11, X. 1949.)

E. HERMAN i J. STIPETIĆ

O PROCESU IZLUČIVANJA ALUMINIJSKOG HIDRATA NA OSNOVI BAYEROVA POSTUPKA

1. PROBLEMATIKA

Alkalični kružni proces, koji je potkraj devedesetih godina prošlog stoljeća uveo Bayer[1]), još i danas je najvažnija tehnička metoda dobivanja glinice raščinjavanjem boksita. Ipak je dosad objavljeno razmjerno malo radnji, koje bi objašnjavale osnovnu bit toga procesa.

Tehnički najvažniji progres i teoretski najzanimljiviji dio *Bayerova* patenta bez sumnje je pojav, da aluminatne otopine naginju raspadanju s dodatkom već izlučenoga aluminijskog oksihidrata. Na taj je način bilo moguće da se napusti prijašnji prilično komplicirani postupak, prema kojemu se aluminijski hidrat dobivao uvođenjem CO_2 u aluminatnu otopinu. Ne zadovoljava potpuno nijedno dosadašnje tumačenje cijepljenja aluminijskim hidratom kod procesa razlaganja, kako se u tehnici najčešće naziva početna faza raspadanja aluminatnih otopina.

Ta se činjenica uglavnom osniva na tome, što su istraživanja konstitucije aluminatnih otopina u toku posljednjih nekoliko godina dovela do različitih, često oprečnih rezultata. Zbog toga je i otežano tumačenje procesa raspadanja aluminatne otopine, koje redovito počinje od konstitucije aluminata u tekućoj fazi. Osim toga nije posvećena dovoljna pažnja kinetici procesa, a ni »aktivitetu« hidratnog cjepiva, kojim se provodi razlaganje aluminatne otopine.

S obzirom na zahtjeve tehničke prakse kod ovih se istraživanja ispitivala kinetika procesa razlaganja, a kod toga i uvjeti za skraćivanje vremena razlaganja, koje obično traje pet do šest dana, a katkada i više. Sporo raspadanje aluminatne otopine zahtijeva kod tehničke provedbe velike rezervoare, provodne cijevi velikih dimenzija, a sve je to spojeno sa znatnim

troškovima. Zbog toga se već mnogo radilo na tome, da se trajanje procesa razlaganja skrati.

I ovdje izloženi pokusi vršili su se s istom namjerom, pri čemu se naročito ispitivao utjecaj veličine zrna hidratnog cjepiva na brzinu procesa izlučivanja. Treba naglasiti, da je za tehničku primjenu važno, da se skraćivanjem vremena izlučivanja dobije krupnozrnati aluminijski oksihidrat, koji se osim toga i dobro filtrira. S teoretskog je gledišta važno osnovno poznavanje procesa izlučivanja, mehanizma reakcija, utjecaja različitih ravnoteža, kao na pr. hidrolitičkih, ravnoteže topljivosti izlučenoga aluminijskog hidroksida u aluminatnoj lužini, pojave prezasićenosti i utjecaja, koji strane primjese u aluminatnoj otopini imaju na njeno raspadanje.

Za rješavanje toga zadatka pripremljena su hidratna cjepiva po različitim metodama i ispitivalo se njihovo djelovanje na proces izlučivanja. Radi utvrđivanja »aktiviteta« hidratnog cjepiva određivala se njegova topljivost u natrijskoj lužini, a veličina zrna mjerila se mikroskopom. Nadalje je veličina primarnih čestica određena iz rentgenograma po *Debye-Scherreru.**

Za pokuse su upotrebljene aluminatne otopine bez stranih primjesa, kao i takve otopine, koje potječu iz jedne tvornice glinice. Na taj se način utvrdio utjecaj stranih primjesa, koje se nalaze u tehničkim aluminatnim otopinama. Radi određivanja ravnoteže ispitivala se topljivost aluminijskog oksihidrata i fino dispergiranog hidrata, upotrebljenog kao cjepivo. Na osnovu dobivenih rezultata opazilo se, da hidratno cjepivo djeluje na proces izlučivanja u izvjesnom smislu katalitički. Postignuti rezultati tumače se ovdje prema novijim teorijama o stvaranju klica i kristalizaciji[2]) [15]). Isto su tako iskorišćeni rezultati, koji su se dobili određivanjem gustoće piknometričkom metodom.

2. IZVOĐENJE POKUSA I EKSPERIMENTALNE PRIPREME

a) *Općenito*

Pokusi su se izvodili točno u okviru Bayerova postupka, i prema tome su upotrebljavane samo aluminatne otopine sa sadržajem od 100 g rastvorenog Al_2O_3 po litri. Molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O$ kretao se u granicama 1 : 1,8—1,9. Za izlučivanje su služile željezne cilindrične posude sadržine 17 litara. Svaka je takva posuda bila smještena u drugu posudu, dvostrukog volumena, koja je bila napunjena vodom, da bi se bolje održavala stalna temperatura. Svaka se posuda zagrijavala električnim grijalom, ugrađenim u dno posude. Budući da nije bilo relejnog regulatora temperature, to se temperatura održavala u granicama točnosti od 1 do 1,5° C povremenim ukopčavanjem ili iskopčavanjem kruga struje, a to je za predviđene pokuse bilo dovoljno. Temperatura se mjerila živinim termometrima, koji su bili učvršćeni na rubu posude za izlučivanje i uronjeni u aluminatnu otopinu. Posude za izlučivanje imale su miješala sa tri para međusobno okomitih krila. Sva su se miješala pokretala pomoću transmisije električnim motorom tako, da je brzina miješanja u svim posudama bila podjednaka (oko 50 okretaja u minuti). Pri izvođenju pokusa posude su napunjene sa 16 litara aluminatne otopine, sve je zagrijano na određenu početnu temperaturu, a zatim je dodano cjepivo. Temperatura se provjeravala danju i noću. Pošto je dodano cjepivo, mjerio se razmak između površine tekućine i ruba posude, a svaka dva sata dodavalo se toliko destilirane vode, koliko se za to vrijeme isparilo. Kod većine pokusa prilagođena je temperatura pogonskim uvjetima Bayerova postupka, t. j. ona se postepeno snižavala. Kinetički pak pokusi (vidi poglavlje 13.) izvedeni su kod konstantne temperature. Vremenski tok izlučivanja aluminijskog oksihidrata praćen je analizama aluminatne otopine, koje su se vršile na niže opisani način.

Pipetom je izvađeno oko 25 ml aluminatne otopine, koja je filtrirana kroz suhi filtar, a u filtratu su određeni Al_2O_3 i Na_2O. U prvih 48 sati analiziralo se svakih 12 sati, a kasnije svaka 24 sata. Sadržaj Al_2O_3 i Na_2O određivao se volumetrijski tropeolinom 00 i fenolftaleinom kao indikatorima. Iako je ova metoda naročito uobičajena u industriji glinice[3]), ipak u analitičkoj literaturi[4]) nema podataka o njezinoj točnosti, a ni točno izrađene radne upute. Metoda se osniva na promjeni *pH*, koja nastaje pri elektrometrijskoj titraciji kisele otopine aluminijske soli natrijevom lužinom[5]). Važno je, da se titrira s »kisele strane« tropeolinom 00, jer s »alkalične strane« reakcija teče suviše sporo. Praktički se titracija aluminatne otopine izvodi na taj način, da se otopini doda kiselina u suvišku, a zatim se završna titracija izvodi lužinom, koja se retitrira kiselinom. Područje takozvane »vezane kiseline«, to jest ona količina, koja je potrebna za stvaranje aluminijske soli, indicira se u početku tropeolinom 00 (prelazno područje pH je 1,3—3,2), a na kraju fenolftaleinom (prelazno područje pH je 8,2—10,0). Budući da se nisu našli nikakvi podaci o točnosti ove metode, njezina se točnost morala provjeriti. U tu je svrhu u Erlenmayerovoj

* Rentgenska snimanja vršio je prof. dr. A. Peterlin, Fizikalni institut Univerziteta, Ljubljana.

tikvici od jenskoga stakla, sadržine 1 litre, otopljeno 12,9935 g aluminijskog lima u 170 ml natrijske lužine. Za vrijeme reakcije tikvica se hladila, a njezin je otvor pokriven stakalcem. Titar lužine, koja je upotrebljena za otapanje, iznosio je 175,12 g Na_2O na litru. Analizom aluminijskog lima našlo se 99,75% Al, 0,15% Fe i 0,10% Si. Nakon rastvaranja dobivena je otopina ohlađena na 20° C, sadržaj je pretočen u odmjernu tikvicu od 250 ml., ispran i dopunjen do marke. Zatim je aluminatna otopina filtrirana kroz suhi filtar, spremljena u jensku bocu i upotrebljavana za pojedina određivanja.

b) *Izvođenje titracije*

10 ml ovako pripremljene aluminatne otopine otpipetirano je u odmjernu tikvicu od 100 ml i dopunjeno destiliranom vodom do marke. Za titraciju tropeolinom 00 i fenoltaleinom uzimalo se po 10 ml te otopine. Kod titracije tropeolinom 00 dodano je (a da nije razrijeđeno vodom) 4—5 kapi 0,1% otopine tropeolina 00, slabo je zagrijano (40—50° C), a zatim je dodano n-HCl do jasno karminastocrvene boje (aluminijski hidrat, koji je nastao za vrijeme filtracije, mora se otopiti u suvišku solne kiseline, zbog čega je potrebno da se otopina još jednom zagrije). Suvišak kiseline titriran je sa n-NaOH do jasnožute boje i dodavano je toliko kapi n-HCl, dok nije nastala crvenkasta boja.

Za titraciju fenolftaleinom kao indikatorom razrijeđena je odmjerena količina otopine s nekih 50 ml vode, dodane su 2—3 kapi otopine fenolftaleina (1% alkoholne otopine), n-HCl u suvišku, zatim je zagrijano na oko 60° C i titrirano s n-NaCH do pojave slabocrvene boje. Titracija je izvedena dobro, ako crvena boja nestane, kad se doda jedna kap HCl, koja se ne uračunava u potrošak.

Radi provjeravanja točnosti metode svako se određivanje vršilo četiri puta. Iz četiri određivanja proračunata je srednja vrijednost i srednja griješka srednje vrijednosti po računu griješaka.

Na isti su se način vršila četiri određivanja titracijom sa n/2-HCl i n/2-NaOH. Razlika potroška n-HCl odnosno n/2-HCl kod titracije tropeolinom 00 i titracije fenolftaleinom daje sadržaj Al_2O_3 u aluminatnoj otopini, pri čemu 1 ml n-HCl odgovara 0,017 g Al_2O_3. Potrošak normalne kiseline kod titracije fenolftaleinom daje sadržaj Na_2O u aluminatnoj otopini, pri čemu 1 ml n-HCl odgovara 0,031 g Na_2O. U istoj aluminatnoj otopini (10 ml dopunjeno vodom na 100 ml) određen je sadržaj aluminijskog oksida četiri puta: dva određivanja izvršena su taloženjem amonijakom po *Biltzu*[6]), a dva taloženjem sa CO_2 po *Frickeu* i *Meyringu*[7]).

Rezultati kontrolnog određivanja, izraženi u gram/lit Al_2O_3, prikazani su u tabeli 1.

TABELA 1.

Redoslijed	Supstanca	Način određivanja	Količina g/l
1	Al_2O_3	teoretski	97,99
2	Al_2O_3	sa n/2-HCl	99,11 ± 0,68
3	Al_2O_3	sa n-HCl	98,70 ± 0,80
4	Al_2O_3	srednja vrijednost grav. određ.	98,27
5	Na_2O	teoretski	119,10
6	Na_2O	sa n/2-HCl	119,10 ± 0,60
7	Na_2O	sa n-HCl	120,8 ± 1,00

Za navedenu koncentraciju aluminatne otopine bila je točnost volumetrijskog određivanja dovoljna. Međutim, ispitivane su aluminatne otopine i veće koncentracije, ali su za Na_2O dobivene vrijednosti, koje su se znatno razlikovale. Izvori griješaka ove metode u prvom su redu teoretske prirode. Tok *pH* vrijednosti, koji je dobiven elektrometrijskom titracijom[4]), pokazuje, da postoji postepeni prijelaz od vezane na slobodnu kiselinu, pa se zbog toga »točka neutralizacije« otopine aluminijske soli teško razaznaje indikatorima. Osim toga, treba uzeti u obzir, da otopine aluminijskih soli lako hidroliziraju, i da je točka prijelaza ovisna o koncentraciji soli. Na osnovu toga objašnjava se, zašto su titracijske vrijednosti ovisne o koncentraciji aluminatne otopine.

c) *Priprema hidratnih cjepiva*

Aluminijski hidrat, koji se dobiva tehničkim putem u procesu razlaganja, u većini je slučajeva tako krupnozrnat i neaktivan, da ga u kružni proces treba dodavati u vrlo velikim količinama, ako se primjenjuje kao cjepivo za izlučivanje hidrata iz još nerazložene lužine. Radi li se tehnički bez primjene hidratnog cjepiva, onda je za cijepljenje potrebno 100—200 postotaka već izlučenog hidrata, da bi se tako postigla brzina procesa razlaganja u onim granicama, koje još omogućuju ekonomično izvođenje procesa. Mora se naglasiti, da je brzina kružnog procesa određena trajanjem najsporije faze. Zbog toga se kao cjepivo moraju upotrebljavati velike količine hidrata

iz produkcije, jer inače proces razlaganja teče suviše sporo. To je bio povod, da se u mnogim slučajevima prešlo na posebnu pripremu cjepiva, koje je aktivnije, i koje treba dodavati u manjim količinama. Način pripremanja takvih »aktivnih hidratnih cjepiva« smatrao se većinom za tajnu, pa u literaturi o tom ima vrlo malo podataka.

Međutim, posljednjih je nekoliko godina kemija aktivnog stanja[8]) toliko uznapredovala, da je i tu, na osnovi mnogobrojnih iskustava u pripremanju katalizatora, principijelno bilo moguće, da se odredi pravac, koji vodi do aktivnih hidratnih cjepiva. S obzirom na mnogobrojnost takvih postupaka ne mogu se spomenuti sve metode. Svakako, za tehničku praksu dolaze u obzir samo jednostavne i ekonomične metode. Općenito uzevši, aktivne čvrste supstance, sastavljene od čestica koloidalnih dimenzija, posjeduju naročita svojstva, na pr. veći sadržaj slobodne energije i veću reakcionu sposobnost, nego kad su u inaktivnom ili stabilnom stanju. Pri razmatranju kemizma Bayerova procesa već se prije došlo do spoznaje, da se može skratiti vrijeme razlaganja i smanjiti količina hidrata potrebna za cijepljenje, ako se smanji veličina čestica.

Tehnički se takvi aktivni hidrati najčešće pripremaju na taj način, da se aluminatne otopine cijepe hidratom iz produkcije kod nižih temperatura (25—35° C) i kod te temperature razlažu nekoliko dana. Tako pripremljeno hidratno cjepivo primjenjuje se kao »lužnato cjepivo«, t. j. kao razmuljeni finozrnati hidrat u razloženoj aluminatnoj lužini. Lužnato cjepivo ima tu tehničku prednost, da otpada filtriranje finozrnatog hidrata. Međutim, vrlo je nepovoljna primjena sušenog hidratnog cjepiva (vidi poglavlje 12.).

Na ovaj način pripremljeno hidratno cjepivo ima, međutim, određenu donju granicu veličine zrna. Nije naime moguće, da se upotrebom krupnijeg hidrata kao cjepiva postigne hidratno cjepivo, kojega bi veličina zrna bila manja od $5—10.10^{-4}$ cm. Prema tome su fizikalno-kemijska svojstva hidratnog cjepiva ovisna o prethodnom stanju hidrata, koji se upotrebljava za pripremu cjepiva.

Ako se želi postići hidratno cjepivo, kojega bi čestice bile manjeg radijusa, onda se moraju primijeniti sasvim druge metode. Za ovakve pokuse pripremljena su hidratna cjepiva na niže opisani način.

Hidratno cjepivo I. 100 g aluminijskog zrna, od približno 1—2 mm veličine, travljeno je sa 5% NaOH i, nakon ispiranja vodom, amalgamirano otopinom $HgCl_2$[9]). Iz vlažne se mase u nekoliko minuta razvija, uz vrlo živu reakciju, pahuljasti, vo-

luminozni hidroksid. Nastali hidrat odvojen je od neotopljenog dijela aluminija i stavljen u 3 l aluminatne otopine, koja sadržava 100 g/l Al_2O_3, a priređena je otapanjem aluminijskog lima u natrijskoj lužini. Molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O$ iznosio je u aluminatnoj otopini 1 : 1,8. Dodani aluminijski oksihidrat otapao se u aluminatnoj otopini u koloidalnoj formi. Nakon toga se aluminatna otopina miješala četiri dana kod 18° C, pri čemu se izlučivao fino dispergirani aluminijski oksihidrat, koji je lagano sedimentirao na dno posude. Dobiveni je hidrat rentgenski sniman Debye-Scherrerovom metodom i utvrđen je kao hidrargilit. Iz rentgenske interferencije određena je veličina primarnih čestica hidrata, koja je iznosila $1—2.10^{-5}$ cm. Nadalje je određena rastvorljivost hidrata u 4n-NaOH.

Hidratno cjepivo II. U 3 l destilirane vode otopljeno je 570 g NaOH i postepeno dodavano 296 g aluminijskog lima. Nakon otapanja aluminija otopina je, radi odvajanja netopljivih sastojaka (Fe i Si), a još vruća, brzo filtrirana kroz Büchnerov lijevak. U toku otapanja isparila se oko 1 l vode. Otopina je zatim ohlađena na 15° C i analizirana. Analizom je ustanovljen sadržaj od 218 g/l Al_2O_3 i 185 g/l Na_2O, t. j. molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1,395$.

Poslije toga dodano je toliko solne kiseline, da je molarni odnos bio 1 : 1. Dodatkom solne kiseline neutraliziran je višak Na_2O. Za neutralizaciju upotrebljena solna kiselina (35%) razrijeđena je u omjeru 1 : 1, hlađena i dolijevana aluminatnoj otopini uz intenzivno miješanje. Solna kiselina dodavala se tako da temperatura otopine, usprkos oslobođenoj toplini neutralizacije, nije porasla iznad 28° C. Dodavanjem solne kiseline nastala je intermedijarno aluminatna otopina molarnog odnosa 1 : 1, koja je nestabilna i odmah se raspada izlučujući aluminijski oksihidrat. Trenutnim raspadanjem aluminatne otopine nastao je sluzavi hidrat koloidnih dimenzija. Već jedan sat nakon dodatka solne kiseline bila je koncentracija otopine samo još 82,5 g/l Al_2O_3 i 122 g/l Na_2O, a nakon četiri dana otopina je sadržavala u svemu 35 g/l Al_2O_3. Zatim je talog nekoliko puta dekantiran vodom, dok nije ispran najveći dio NaCl. Nakon toga nadopunjeno je na isti volumen sa NaOH koncentracije 122 g/l Na_2O. Rentgenskim snimanjem ustanovilo se, da je nastao bajerit. Iz rentgenskih interferencija određena je veličina primarnih čestica bajerita, koja je iznosila $0,4.10^{-6}$ cm. Nadalje je određena topljivost preparata u 4n-NaOH.

Hidratno cjepivo III. Kao cjepivo upotrebljen je bajerit, pripremljen po *Frickeu* i *Wullhorstu*[10]). Hladna zasićena otopina NaOH zagrijana je, a zatim je dodavan veoma čisti $Al(OH)_3$ do

zasićenja, nakon čega je dobivena otopina razrijeđena vodom do gustoće 1,15 i filtrirana. U filtrat se polagano uvodio CO_2, pa se nakon tri dana dobio talog hidrata, koji se dekantirao vodom, filtrirao i sušio na zraku. Tako dobiveni preparat rentgenski je identificiran kao bajerit.

Ovo se cjepivo upotrebilo za cijepljenje aluminatne otopine koncentracije 100 g/l Al_2O_3 i molarnog odnosa 1 : 1,8. Aluminatna otopina priređena je otapanjem aluminijskih zrnaca u NaOH. Deset litara ove aluminatne otopine cijepljeno je sa 100 g bajerita. Izlučivanje je trajalo pet dana, a kod temperature od 25° C. Izlučeni je hidrat spremljen u bocu zajedno s otopinom.

Hidratno cjepivo IV. Kao cjepivo upotrebljen je hidrargilit po *Achenbachu*[11]), a priređen po propisu *Schultena*[12]). U natrijskoj je lužini (1050 g NaOH u 5,6 l vode) otopljeno 350 g aluminijskih strugotina. Nakon otapanja otopina je ponovo nadopunjena destiliranom vodom na 5,6 l i od neotopljenog odvojena filtracijom. Filtrirana otopina zagrijana je na temperaturu od 95° C i preko površine strujao je CO_2 (nije uvođen u otopinu). Nakon tri dana reakcija je prekinuta, a dobiveni matični lug sadržavao je još 50 g/l Al_2O_3. Talog je otfiltriran, ispran vrućom vodom i sušen na zraku. Talog, dobiven na ovaj način, fizikalno je vrlo nejednolik i djelomice se sastojao od vrlo finog hidrata. Ovaj je preparat upotrebljen za cijepljenje aluminatne otopine na isti način, kao što je to opisano pri dobivanju hidratnog cjepiva III. Dobiveno hidratno cjepivo spremljeno je zajedno s razloženom otopinom u bocu.

Hidratno cjepivo V. Hidrat iz produkcije, koji se tehnički dobiva Bayerovim postupkom, upotrebljen je za cijepljenje tehničke aluminatne otopine (vidi pod d). U 2 l aluminatne otopine dodano je 100 g tog hidrata. Proces razlaganja trajao je šest dana, kod 35° C. Hidratno je cjepivo zajedno s razloženom aluminatnom otopinom spremljeno u bocu.

Sva navedena hidratna cjepiva upotrebljena su kao »lužnata cjepiva«, to jest kao razmuljeni izlučeni hidrat u razloženoj aluminatnoj otopini. Podaci o dodanim količinama cjepiva izraženi su, jednostavnosti radi, u volumnim procentima lužnatog cjepiva prema ukupnom volumenu cijepljene aluminatne otopine.

Izvedeno je nekoliko pokusa sa sušenim hidratnim cjepivom. Hidratno cjepivo I filtriralo se, dobro ispralo i na zraku sušilo. Zatim se jedan dio hidrata sušio još četiri sedmice u eksikatoru sa $CaCl_2$, a drugi se dio nakon hidriranja sušio u sušioniku kod 105° C do konstantne težine.

d) *Opis aluminatnih otopina, koje su upotrebljene kod pokusa*

Pokusi razlaganja vršili su se sa četiri različite aluminatne otopine, koje su se međusobno razlikovale po stepenu čistoće.

Aluminatna otopina A je aluminatna lužina, dobivena otapanjem aluminijskih zrnaca u NaOH. Stvoreni talog Fe i Si odvojen je filtriranjem. Pritom su se aluminijska zrnca, NaOH i voda uzimali u takvim uteznim omjerima, da je dobivena aluminatna otopina sadržavala 100 g/l Al_2O_3 i da je imala molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1{,}8$. Aluminatna otopina dobivena na ovaj način, nije sadržavala stranih primjesa, što naročito vrijedi za SiO_2, jer su se za otapanje aluminija u NaOH upotrebljavale željezne posude.

Aluminatna otopina B tehnička je aluminatna otopina, dobivena iz pogona jedne tvornice glinice. Ona je sadržavala 100 g/l Al_2O_3 i molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1{,}9$. Otopina je sadržavala u litri ove nečistoće: 25,4 g Na_2CO_3, 11,95 g Na_2SO_4, 0,8 g NaCl, manje od 0,1 g CrO_3, manje od 0,2 g V_2O_5, manje od 0,1 g P_2O_5, 0,5 g SiO_2, 0,01 g čestica crvenog mulja u obliku sedimenta. Za oksidaciju organske supstance, koja je bila sadržana u 1 litri, potrošeno je 695 ml n/10 $KMnO_4$.

Za određivanje organske supstance uzeto je 50 ml aluminatne otopine, koja je zakiseljena s H_2SO_4. Nastali CO_2 uklonjen je kuhanjem, a zatim je otopina još vruća, titrirana sa $KMnO_4$ do pojave ružičaste boje. Još su točnije vrijednosti dobivene, ako se otopini, koja je zakiseljena sa H_2SO_4, a iz koje je uklonjen CO_2, dodao kromat, i ako se tako dobivena otopina ugrijala. Pritom organske tvari (huminska kiselina), sadržane u aluminatnoj otopini, oksidiraju u CO_2. Ugljikov dioksid je apsorbiran u apsorpcionim cijevima, koje su sadržavale natronsko vapno. Odvagnuta količina CO_2, pomnožena faktorom 0,471, daje sadržaj huminske kiseline. Aluminatna otopina B sadržavala je 4,23 g/l huminske kiseline.

Aluminatna otopina C tehnička je aluminatna otopina iste koncentracije kao i aluminatna otopina B, koje se priprema vršila češćenjem aluminatne otopine B aktivnim ugljenom. Uzelo se 50 l aluminatne otopine B i dodalo se 75 g aktivnog ugljena, koji je prethodno razmuljen u malo destilirane vode. Dodatkom aktivnog ugljena postizava se znatno razbistravanje smeđe obojene aluminatne otopine, a potrošak $KMnO_4$ smanjuje se i iznosi 430 ml n/10-$KMnO_4$, što odgovara sadržaju huminske kiseline od 2,62 g/l.

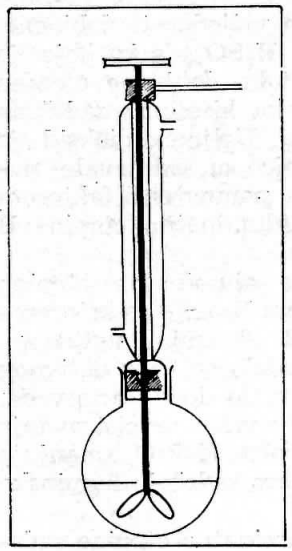
Aluminatna otopina D. Tehničke aluminatne otopine sadržavaju uvijek male količine fino dispergiranih čestica crvenog

mulja, koje preostaju nakon dekantacije i filtracije aluminatne lužine. Takve aluminatne otopine sadržavaju prosječno 0,015 g/l čvrste supstance, koja se sastoji uglavnom od željeznog oksihidrata. Kod boksita, koji slabo dekantiraju, može njihov sadržaj biti još i veći.

Poznato je, da na kristalizacione pojave znatno utječu vrlo male količine stranih primjesa. Zbog toga se ispitivao utjecaj željeznog oksihidrata na proces razlaganja. Aluminatnoj otopini A dodano je toliko fino raspršenoga željeznog oksihidrata, da je jedna otopina sadržavala 0,015 g/l Fe_2O_3, a drugi 0,08 g/l. Priprema fino dispergiranoga željeznog oksihidrata izvršena je na ovaj način: u 400 ml otopljeno je 6,28 g Mohrove soli, to je zakiseljeno s malo sumporne kiseline, oksidirano sa H_2O_2 i željezo je taloženo u hladnom s amonijakom. Talog je razmuljen u 600 ml vode i peptiziran s malo razrijeđene HCl. Na ovaj način dobiveni fino raspršeni željezni oksihidrat dodan je, pet minuta prije cijepljenja, u 16 l aluminatne otopine A.

3. ODREĐIVANJE TOPLJIVOSTI ALUMINIJSKOG OKSIHIDRATA I HIDRATNOG CJEPIVA U 4nNaOH KAO MJERILO »AKTIVITETA« I ODREĐIVANJE BRZINE OTAPANJA

Termodinamički stabilna ravnoteža procesa razlaganja, kod određene temperature, data je ravnotežom topljivosti aluminijskog oksihidrata u NaOH. Uspostavljanje ravnoteže pri procesu razlaganja teče zbog prezasićenja vrlo sporo, pa je za određivanje ravnoteže primijenjen drugi put, to jest otapanje aluminijskog oksihidrata u NaOH.



Sl. 1.

Otopini 4nNaOH odgovara sadržaj od 124 g/l Na_2O, a to je približno ista koncentracija Na_2O kao i kod aluminatne otopine, koja se razlaže po Bayerovu postupku.

Određivanje topljivosti vršilo se u aparaturi, koja je prikazana na slici 1.

Na okruglu jensku tikvicu sa brušenim grlom nataknuto je Liebigovo hladilo, koje je na oba kraja imalo ugrađene ležaje. Kroz hladilo je prolazila čelična šipka, učvršćena u oba ležaja. Na donjem kraju šipke bila su smještena dva krila, koja su služila kao miješalo, a na gornjem kraju remenica, gonjena elektromotorom. Aparatura je do ruba tikvice stavljena u termostat, a kroz hladilo je propuštana voda za hlađenje. Za određivanje topljivosti odvagnuto je 25 g aluminijskog oksihidrata, dodano je 450 ml 4nNaOH, i aparatura je stavljena u pogon. Da bi se postigla ravnoteža, otapanje se vršilo sedam do osam dana kod nižih temperatura (18°—40° C), a kod viših temperatura (40°—60° C) tri do četiri dana. Sadržaj Al_2O_3 u lužini određivao se gravimetrijski kao $Al(OH)_3$ taloženjem sa CO_2 po *Frickeu* i *Meyringu*[13]. Na gornji način određivala se topljivost aluminijskog oksihidrata, kao i topljivost pojedinih hidratnih cjepiva. Radi ispitivanja veličine zrna i fizikalne jednoličnosti hidrata povećavale su se također, kod određivanja topljivosti, odvage pri istoj količini NaOH. Nadalje je određivana i brzina otapanja i to kod 25° C.

4. PROMJENA VELIČINE ZRNA ALUMINIJSKOG OKSIHIDRATA U OVISNOSTI O VREMENU RAZLAGANJA ALUMINATNE LUŽINE

Kinetičke pokuse procesa razlaganja pratila su i mjerenja veličine zrna izlučivanog hidrata. U toku izlučivanja aluminijskog oksihidrata pokazalo se, da je prvi dan izlučeni hidrat najkrupniji, a da drugog i trećeg dana izlučene pojedine frakcije sadržavaju uvijek više manjih čestica. Prema teorijama o stvaranju kristala iz otopina[15]) ne bi se mogli očekivati takvi rezultati, jer, općenito uzevši, iz jako zasićenih otopina ispadaju fino kristalinični talozi, a iz slabo zasićenih naprotiv krupnozrnati. S obzirom na sporo stvaranje aluminijskog oksihidrata moglo bi se pretpostaviti, da su mogućnosti rasta čestica, koje se izlučuju drugoga i trećeg dana, znatno smanjene već izlučenim hidratom, budući da novo izlučene čestice hidrata ne mogu više u toj otopini tako dobro rasti. Da bi se ova pojava ispitala, vršili su se pokusi tako, da je nakon prvog dana izlučeni hidrat izdvojen iz izlučivača, i aluminatna je lužina još jedamput cijepljena.

Mjerenje veličine zrna, t. j. u mikroskopu vidljivih sekundarnih čestica, vršilo se kod krupnozrnatih preparata mikroskopski, a kod fino disperznih preparata veličina je čestica dobivena iz rentgenskih interferencija. Budući da se na temelju rentgenskih interferencija mogu identificirati veličine kristala tek ispod 10^{-5} cm, to su se mikroskopska mjerenja veličina 10^{-4} do 10^{-5} cm vršila manje točno, tako da se mogao ocijeniti samo red veličine.

5. PIKNOMETRIČKO ODREĐIVANJE GUSTOĆE ALUMINIJSKOG OKSIHIDRATA

Da bi se fizikalno karakterizirali hidrati, koji su dobiveni pri procesu razlaganja, određivala se gustoća pojedinih preparata. Za određivanje gustoće upotrebljeni su piknometri, opremljeni termometrom, podijeljeni u desetinke stupnjeva. Mjerenja su se vršila na osnovi *Harmsovih* uputa[14]), navedenih u monografiji »Gustoća tekućih i čvrstih tvari«. Kod mjerenja je vaganje reducirano na zrakoprazan prostor. Kao piknometrička tekućina služio je ksilol, iz kojega je prije upotrebe uklonjena voda bezvodnim $CaCl_2$. Mjerenja su se vršila kod 25° C s točnošću od ± 0,1° C.

6. PRIKAZ REZULTATA PROCESA RAZLAGANJA

Kod ispitivanja je glavna pažnja posvećena proučavanju ovih pitanja:

a) utjecaj veličine zrna hidratnog cjepiva na kinetiku procesa razlaganja;

b) djelovanje hidratnog cjepiva, razmuljenog u razloženoj aluminatnoj otopini, i djelovanje suhoga hidratnog cjepiva;

c) utjecaj stranih primjesa, sadržanih u aluminatnoj otopini, na brzinu procesa razlaganja i osobine izlučenog hidrata;

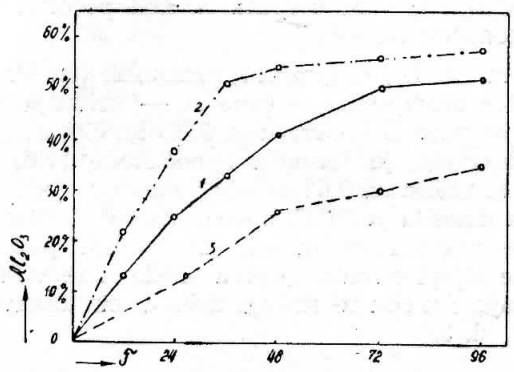
d) djelovanje bajerita i hidrargilita kao cjepiva;

e) Uloga hidratnog cjepiva u procesu razlaganja.

Rezultati ispitivanja prikazani su na dijagramima 2 do 7. Na apscisu je naneseno vrijeme τ u satima, a na ordinatu količina izlučenog hidrata, izražena u % Al_2O_3. Budući da je aluminatna otopina, koja se razlagala, redovno sadržavala 100 g Al_2O_3, to se dobivala količina Al_2O_3, koja je odgovarala izlučenom hidratu, tako da se od 100 oduzela količina Al_2O_3 u otopini.

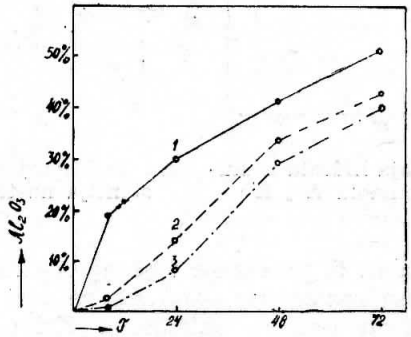
Iz dijagrama na slici 2. razabira se utjecaj veličine zrna hidratnog cjepiva. Za razlaganje je upotrebljena aluminatna otopina C (vidi poglavlje 2., d). Cijepljeno je »lužnatim cjepivom«. Krivulja 1 prikazuje rezultat cijepljenja sa 1,54 vol % hidratnog cjepiva I; krivulja 2 sa 0,15 vol % hidratnog cjepiva II; krivulja 3 sa 17,0 vol % hidratnog cjepiva V. Temperatura je prilagođena praktičnim uvjetima rada po Bayerovu postupku. Početna temperatura iznosila je 55° C, konačna temperatura

nakon četiri dana 40° C. Svakih dvanaest sati snižavana je temperatura tako, da je odgovarala linearnoj krivulji hlađenja od 55°—40° C.



Sl. 2. Utjecaj veličine zrna hidratnog cjepiva na brzinu izlučivanja

Dijagram na sl. 3. prikazuje rezultate ispitivanja, koja su se vršila hidratnim cjepivom I, pripremljenim na različite načine. Krivulja 1 odgovara »lužnatom cjepivu« (1,54 vol %); krivulja 2 hidratnom cjepivu, sušenom kod sobne temperature

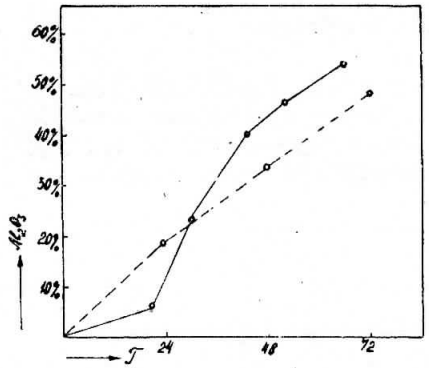


Sl. 3. Brzina izlučivanja hidrata sa različito pripremljenim cjepivima

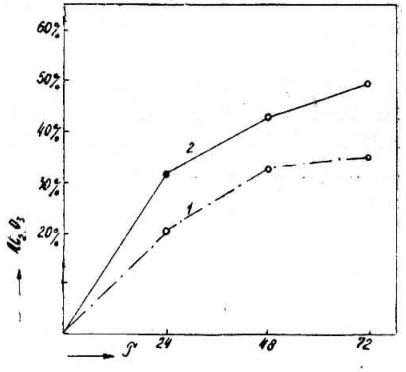
sa $CaCl_2$; krivulja 3 hidratnom cjepivu, sušenom kod 100° C. U sva tri slučaja upotrebljene su iste količine hidratnog cjepiva, i to 1,67 g $Al(OH)_3$ na litru aluminatne lužine. Mora se naročito

istaći, da se kod upotrebe sušenog hidratnog cjepiva opazilo pogoršanje kvalitete izlučenog hidrata s obzirom na veličinu zrna. Dobiveni je hidrat bio disperzan mnogo jače negoli kod upotrebe lužnatog cjepiva (vidi i pogl. 13.). U ovim pokusima razlagana je aluminatna otopina A kod početne temperature od 60° C i konačne od 40° C.

Dijagram na slici 4. prikazuje raznolik tok izlučivanja kod upotrebe čiste aluminatne otopine A — krivulja 1, i tehničke aluminatne otopine B — krivulja 2. Tehnička aluminatna otopina B sadržavala je navedene nečistoće (vidi pogl. 2., d). Cijepljenje se vršilo sa 0,62 vol % lužnatog cjepiva I. Početna temperatura iznosila je 50° C, a konačna 35° C. Mora se naročito istaći, da se ovako raznolik tok izlučivanja pojavljuje samo onda, kad se cijepi s malo cjepiva. Doda li se više cjepiva, te razlike nestaju, i u oba se slučaja dobiva tok, kakav je prikazan krivuljom 1, sl. 3.



Sl. 4. Tok izlučivanja hidrata u aluminatnim otopinama A i B

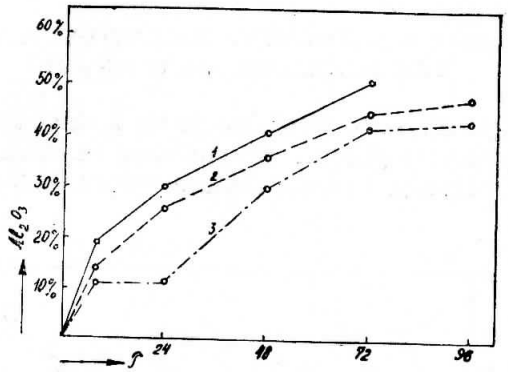


Sl. 5. Utjecaj organskih supstancija na tok razlaganja

Dijagram na sl. 5. prikazuje utjecaj organskih supstancija na brzinu procesa razlaganja. Kao što se vidi, organske supstancije usporavaju proces razlaganja. Krivulja 1 odgovara razlaganju aluminatne otopine B, a krivulja 2 aluminatne otopine C. Kao što je već spomenuto, otopina C dobivena je obradom otopine B s aktivnim ugljenom, pri čemu je uklonjen dio huminske kiseline.

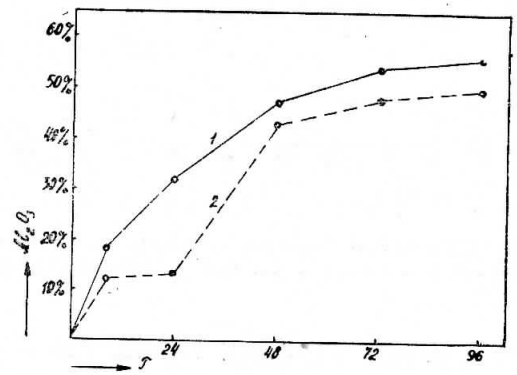
Cijepljeno je sa 1,25 vol % hidratnog cjepiva I. Početna temperatura bila je 55° C, a konačna 40° C.

Dijagram na sl. 6. prikazuje utjecaj fino dispergiranoga željeznog oksihidrata u aluminatnoj otopini na tok razlaganja. Krivulja 1 prikazuje razlaganje aluminatne otopine A, krivulja



Sl. 6. Utjecaj fino dispergiranoga željeznog oksihidrata u aluminatnoj otopini na tok razlaganja

2 razlaganje aluminatne otopine D sa 0,015 g/l Fe_2O_3, a krivulja 3 razlaganje iste otopine 0,08 g/l Fe_2O_3. Cijepljeno je sa 1,54 vol % hidratnog cjepiva I. Početna je temperatura bila 60° C, a konačna 40° C.



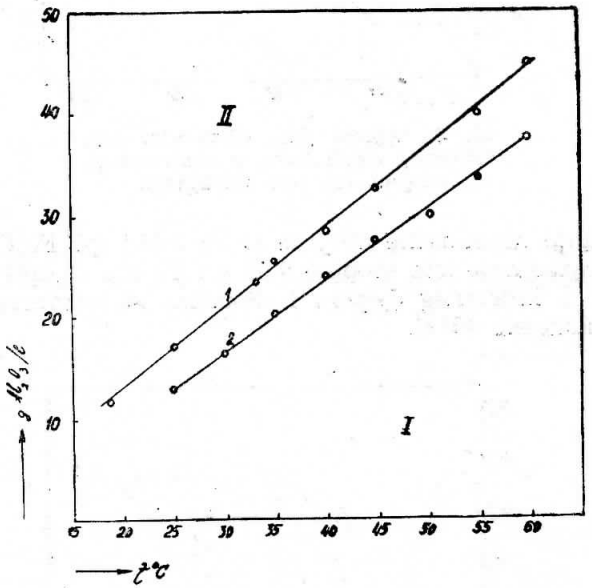
Sl. 7. Djelovanje hidratnog cjepiva III i IV

Krivulja 1 na sl. 7. prikazuje djelovanje hidratnog cjepiva IV, a krivulja 2 hidratnog cjepiva III. Razlaganje aluminatne

otopine A vršilo se cijepljenjem sa 1,54 vol % hidratnog cjepiva III odnosno IV. Početna temperatura bila je 60° C, a konačna 40° C.

7. REZULTATI ODREĐIVANJA TOPLJIVOSTI HIDRATA I HIDRATNOG CJEPIVA U 4nNaOH

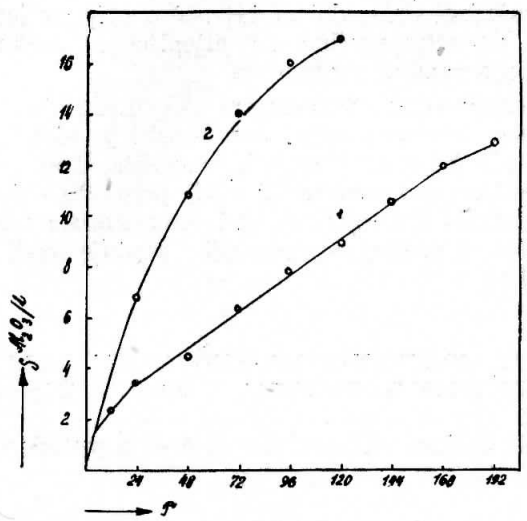
Na dijagramu sl. 8. nanesena je na apscisi temperatura u °C, a na ordinati topljivost aluminijskog oksihidrata izražena u g/l Al_2O_3. Krivulja 1 odnosi se na topljivost hidratnog cjepiva



Sl. 8. Topljivost izlučenoga hidrata i hidratnog cjepiva I u 4nNaOH pri raznim temperaturama

I, krivulja 2 odgovara topljivosti hidrata nakon prvog dana razlaganja (odvojena frakcija). Za hidratno cjepivo II (bajerit) topljivost kod 25° C iznosi 20,2 g/l Al_2O_3, a kod 28,5° C 23,5 g/l Al_2O_3.

Krivulja 1 na sl. 9. prikazuje brzinu otapanja aluminijskog oksihidrata (iz aluminatne otopine A prvog je dana odvojena



Sl. 9. Brzina otapanja izlučenoga hidrata i hidratnog cjepiva I kod 25° C

frakcija), a krivulja 2 brzinu otapanja hidratnog cjepiva I. Na apscisi je naneseno vrijeme τ u satima, a na ordinati količina otopljenoga hidrata, izražena u g/l Al_2O_3.

8. ISPITIVANJE STRUKTURE ALUMINIJSKOG OKSIHIDRATA, DOBIVENOG UVOĐENJEM CO_2 U ALUMINATNU OTOPINU

Fricke[16]), *Fricke* i *Jucaitis*[17]), pa i *Fricke* i *Wullhorst*[18]) izradili su metodu za pripremanje čistog hidrargilita i bajerita. Uvjeti, koje navode navedeni autori, moraju se strogo održavati, jer se inače dobiva smjesa obiju modifikacija trihidrata.

Postavlja se pitanje, da li uvođenjem CO_2 u aluminatnu otopinu (kod 25° C), koju sadržava 100 g/l Al_2O_3, a čiji je molarni odnos $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1,8$, nastaje čisti hidrargilit, bajerit ili smjesa obiju modifikacija. Za pogonsku praksu ovo pitanje nema direktnog značenja, ako se radi po Bayerovu postupku, jer danas ne dolazi više u obzir pripremanje cjepiva uvođenjem CO_2 u aluminatnu otopinu. Uvođenje CO_2 u aluminatnu otopinu potrebno je u rijetkim slučajevima, kad se tvornica stavlja u pogon, a nema raspoloživog cjepiva. Neki

tehnički stručnjaci drže, da na taj način pripravljeno hidratno cjepivo nije naročito zgodno za cijepljenje, međutim, o tom pitanju postoje različita mišljenja.

Talog, koji nastane uvođenjem CO_2 u aluminatnu otopinu, kod navedene koncentracije, rentgenski je identificiran kao smjesa od 80% bajerita i 20% hidrargilita. Tom je preparatu gustoća određena piknometrički (vidi pogl. 9.). Ako se gornji preparat upotrebi kao cjepivo kod temperature razlaganja od 55—60° C, već u drugoj »generaciji« nastaje čisti hidrargilit (vidi pogl. 14.).

9. REZULTATI ISPITIVANJA VELIČINE ZRNA HIDRATA, REZULTATI RENTGENSKIH SNIMANJA I ODREĐIVANJA GUSTOĆE

U tabeli 2. dani su rezultati mjerenja veličine zrna pojedinih preparata.

TABELA 2.

Redoslijed	Oznaka	Veličina zrna	Veličina čestica
a	b	c	d
1	$Al_2O_3 . 3H_2O$, frakcija nakon prvog dana razlaganja; aluminatna otopina A	8—12.10^{-3}	—
2	$Al_2O_3 . 3H_2O$, frakcija nakon prvog dana razlaganja; aluminatna otopina B	5—8.10^{-3}	—
3	$Al_2O_3 . 3H_2O$, frakcija nakon drugog i trećeg dana razlaganja; aluminatna otopina A, B	1—5.10^{-3}	—
4	Hidratno cjepivo I	oko 2,5.10^{-5}	1,0.10^{-5}
5	Hidratno cjepivo II	—	4,0.10^{-6}
6	Hidratno cjepivo V	5—10.10^{-4}	—

Preparati 1, 2 i 3 dobiveni su cijepljenjem hidratnim cjepivom I. Rezultati u koloni c dobiveni su mikroskopskim mjerenjem, a kolona d sadržava vrijednosti za veličine čestica,

dobivene rentgenografski. Mora se napomenuti, da se mikroskopskim mjerenjem dobivaju veličine sekundarnih čestica, a rentgenskim snimanjem veličine pojedinih kristalita ili primarnih čestica.

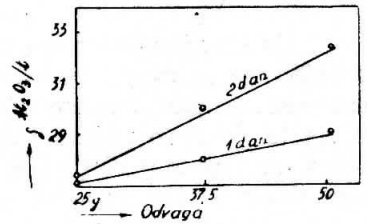
Taložne frakcije, koje su odvojene prvoga, drugog i trećeg dana razlaganja, sastojale su se isključivo od hidrargilita, kako je to utvrđeno rentgenskim ispitivanjem. Takav je rezultat dobiven bez obzira na to, je li se radilo o čistoj aluminatnoj otopini A ili tehničkoj aluminatnoj otopini B. Piknometričkim određivanjem gustoće dobio se isti rezultat (vidi tabelu 3.).

TABELA 3.

Redoslijed		ϱ (25°)	Gubitak žarenjem u %
a	b	c	d
1	Frakcija poslije prvog dana, aluminatna otopina A	2,4202 ± 0,0011	34,88
2	Frakcija poslije prvog dana, aluminatna otopina B	2,4193 ± 0,0015	34,93
3	$Al(OH)_3$ dobiven uvođenjem CO_2 u aluminatnu otopinu (vidi pogl. 8.)	2,4081 ± 0,0012	35,05

Fricke i *Severin*[19]) našli su, da hidrargilit ima gustoću 2,424 kod 20° C, a bajerit 2,529. Kako se u tabeli 3. pod 3 radi o preparatu (vidi pogl. 8.) s gustoćom 2,4081, koji je smjesa od približno 20% hidrargilita i 80% bajerita, to bi se iz toga za čisti bajerit-preparat mogla proračunati vrijednost za gustoću 2,405. Ovaj je proračun samo približan, jer se rentgenskim snimanjem nikada ne može utvrditi točan procentualni sastav, i jer vrijednosti za gustoću nisu reducirane na potpuno bezvodnu supstanciju (teoretski gubitak žarenjem 34,65%). U svakom je slučaju potrebno, da se gustoća čistih bajerit-preparata još jedamput provjeri. Na osnovi teoretskih razmatranja proizlazi, da bi bajerit morao imati manju gustoću od hidrargilita, jer je bajerit u odnosu prema hidrargilitu nestabilan, i jer gotovo uvijek spojevi s većom toplinom stvaranja imaju i veću gustoću.

U dijagramu sl. 10. prikazani su rezultati određivanja topljivosti aluminijskog oksihidrata u 4n Na OH s povećavanom odvagom.



Sl. 10. Ispitivanje fizikalne jedinstvenosti aluminijskog oksihidrata određivanjem topljivosti u ovisnosti o količini taložne supstance, kod 45°C

Kao mjerilo za fizikalnu jedinstvenost aluminijskog oksihidrata *Fricke*[20]) je prvi istakao ovisnost njegove topljivosti u lužinama o povećanoj odvazi taložne supstancije. Topljivost fizikalno potpuno jedinstvenih preparata neovisna je o relativnoj količini taložne supstance, a kod smjesa različite veličine zrna i prema tome različito topljivih čestica s povećanom količinom taložne supstancije topljivost raste. Ova se pojava objašnjava tako, što kod manje količine taložne supstancije čestice veće topljivosti nisu još postigle stepen zasićenja, jer se u taložnoj supstanciji još ne nalaze u dovoljnom broju. Dijagram sl. 10. pokazuje, da kod procesa razlaganja ne postoje uvjeti za izlučivanje fizikalno jedinstvenih preparata. Taložna frakcija nakon prvog dana razlaganja mnogo je homogenija negoli taložna frakcija nakon drugog dana razlaganja. Naročito je jako disperzan hidrat, koji se izlučio trećega i četvrtog dana, iako je brzina izlučivanja bila znatno manja. Pa i u onom slučaju, kad se hidrat, izlučen nakon prvoga dana, iz izlučivača ukloni, i otopina ponovo cijepi, dobiva se jaka ovisnost topljivosti o povećanoj količini taložne supstancije. Kod daljeg povećanja odvage dobiva se pravac, koji ide paralelno s apscisom, kako se to vidi u dijagramu sl. 10.

10. DOSADAŠNJE SPOZNAJE O TEORETSKIM OSNOVAMA PROCESA RAZLAGANJA

Teoretsko razmatranje procesa razlaganja mora uvijek početi sa sastavom razrijeđenih aluminatnih otopina. Pitanje konstitucije amfoternih elektrolita u alkaličnim otopinama nije još do danas potpuno objašnjeno, iako se u literaturi mnogo

obrađuje. Ima autora, koji uopće negiraju amfoterni karakter $Al(OH)_3$ i aluminate smatraju za koloidalne otopine, to jest za peptizirane soli aluminijskog hidrata[21]). Ovo gledište dokazuje činjenica, da se električna vodljivost lužine dodatkom $Al(OH)_3$ naročito ne mijenja, i da se tim dodatkom povećava njezin viskozitet. Protiv toga gledišta govori i samo opažanje autora, a to je, da se aluminatne otopine ne mogu koagulirati. Postojanje koloidalnih čestica ne može se dokazati ultramikroskopom. Iako to nije bezuvjetni dokaz, da koloidne čestice ne postoje, ipak se mora uzeti u obzir, da bi se one kod mnogobrojnih i različitih metoda dobivanja aluminatnih otopina ipak jednom morale pojaviti, jer veličina čestica jako ovisi o načinu njihova pripremanja. Ne smije se zaboraviti, da se kod zamišljene koloidne prirode aluminatnih otopina ne bi nikad mogla stvoriti prava ravnoteža topljivosti, a ispitivanja topljivosti hidrargilita u natrijskoj lužini, u nekoliko uporednih pokusa, dala su stvarno konstantne vrijednosti zasićenja.

Prema ispitivanjima *Ostwalda*[40]) i *Ostwálda* i *Buzágha*[41]) između jako disperznih i koloidnih otopina postoje ove vrlo karakteristične razlike. Za jako disperznu (molekularno disperznu) topljivost vrijedi, kod fizikalno potpuno jedinstvene supstancije (ista veličina zrna), *Gay-Lussacovo* pravilo, prema kojemu je topljivost neovisna o količini taložne supstance. Ovakav idealizirani slučaj rijetko se pojavljuje kod realnih kristala oksihidrata, a pogotovu se ne pojavljuje pod uvjetima, koji se traže po Bayerovu postupku. Tu se uvijek izdvaja smjesa zrna različitih veličina i prema tome različito topljivih čestica. Iz dijagrama sl. 10. vidi se, da taložna frakcija nakon prvog dana razlaganja pokazuje mnogo manju ovisnost topljivosti o povećanoj odvazi nego ona nakon drugog dana. Ovisnost topljivosti s povećanom količinom taložne supstance svodi se u ovom slučaju na postojanje energetski nehomogene supstance, a to znači, da sadržava čestice različite topljivosti. Kod jednoga potpuno homogenog preparata bez sumnje bi vrijedilo Gay-Lussacovo pravilo. Uostalom, *Fricke* i *Jucaitis*[42]) su izradili metodu za pripremanje hidrargilita, kod kojega je bilo zadovoljeno Gay-Lussacovo pravilo, to jest topljivost je bila neovisna o količini taložne supstance.

Peptizirani solovi vladaju se sasvim drugačije. U većini slučajeva nailazi se na ovisnost topljivosti o količini taložne supstance, koja kod točno određene količine taloga pokazuje maksimum, a kod daljeg povećanja topljivost se smanjuje. Takav se odnos može izvesti na osnovu čisto energetskih opa-

žanja na solu[41]). Kod svih molekularno disperznih otopina krivulja topljivosti nikad nema maksimuma.

Protiv tumačenja o koloidnoj disperziji aluminijskog hidrata govore i rezultati mnogih autora, koji su potenciometrijski titrirali otopinu aluminijskog klorida sa NaOH. Pri tom se moglo, kod takozvanoga »aluminatnog skoka« besprijekorno dokazati »stvaranje soli«[23]). Protiv stvaranja prave soli ima, međutim, također nekoliko prigovora. Dosad nije pošlo za rukom, da se iz razrijeđenih aluminatnih otopina, kakvi se upotrebljavaju za razlaganje po Bayerovu postupku, izdvoji točno definirani, čvrsti natrijski aluminat[24]). Kao donju granicu koncentracije, kod koje se iz vodenih otopina natrijskog aluminata dobiva čvrsti aluminat, *Fricke* i *Jucaitis*[25]) navode 22% Na_2O kod 30° C. Dobiveni aluminat ima sastav $2\ Na_2O.2Al_2O_3.5H_2O$. Ispod 22% Na_2O, a kod 30° C, dolazi uvijek kao taložna supstancija aluminijski hidrat. Osim toga, i vodene su aluminatne otopine nestabilne i samo onda ograničeno postojane, kad je molarni odnos $Na_2O : Al_2O_3$ veći od 1. Koncentriranije otopine redovito su stabilnije nego razrijeđenije. Zamišljena aluminatna otopina molarnog odnosa $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1$ raspada se trenutno izlučujući $Al(OH)_3$. Ovu činjenicu uzimaju u obzir čak i autori, koji su se izjasnili za stvaranje pravih soli pri nastajanju aluminata. *Slade* i *Polak*[26]) su objavili, da se mjerenjem vodljivosti razrijeđenih aluminatnih otopina mogla utvrditi prisutnost aluminata, koji su se brzo raspali.

U literaturi se za natrijski aluminat u vodenim otopinama navodi formula $NaAlO_2$[27]), što odgovara natrijskoj soli jednobazične aluminijske kiseline $HAlO_2$. Ova formula zadovoljava za aluminatne otopine, kojih je koncentracija Na_2O veća od 22%. Kod razrijeđenih otopina, koje se raspadaju djelomice spontano, a djelomice s dodatkom hidratnog cjepiva, izlučujući $Al(OH)_3$, gornja se formula može također upotrebiti, ako proces raspadanja promatramo kao hidrolizu, i to prema reakcionoj jednadžbi

$$AlO_2^- + 2\ H_2O \rightleftarrows Al(OH)_3 + OH^-.$$

Izlučivanje aluminijskog oksihidrata po Bayerovu postupku u literaturi se stvarno prikazuje kao hidroliza[28]). *Fricke*[22]) je prvi posumnjao, da se ovdje ne radi o čistoj hidrolizi, i s pravom je ukazao na činjenicu, da efektivni stupanj hidrolize, koji se

postigao pri razlaganju, ne stoji ni u kakvu razmjeru s jakošću kiseline (vidi pogl. 11.). On međutim nije dao nikakvih podataka o hidrolitičkoj ravnoteži, ali je držao, da pored hidrolitičke ravnoteže postoji još ravnoteža aluminata s koloidno otopljenim hidratom, ali ni za to nije pružio nikakvih dokaza. Do takva tumačenja dolazi *Fricke* na osnovu eksperimenata, koji su pokazali, da svježe pripremljene aluminatne otopine pokazuju manju vodljivost, a i manje sniženje točke ledišta, od onih, koji su dulje vremena stajali. Nadalje, da izlučivanje aluminijskog hidrata i povišenje vodljivosti kod procesa razlaganja ne teku paralelno. Međutim, takva pojava ne mora bezuvjetno biti vezana sa prisutnošću koloidnoga aluminijskog hidrata (vidi pogl. 12.). Iako *Fricke* dopušta mogućnost prijelaza u jednu polikiselinu, ipak se odlučuje za koloidnu »ravnotežu«. Djelovanje hidratnog cjepiva promatra on kao ubrzano koagulaciono djelovanje koagulacionih centara, koje nastaje uvođenjem cjepiva u fino razdijeljeni i dobro peptiziranu sol aluminijskog oksihidrata. Za ovakvo tumačenje nedostaju dokazi o postojanju koloidnih soli aluminijskog oksihidrata, a osim toga i ostali bi koagulatori morali imati isto djelovanje. Iz ovih se izlaganja vidi, da se hipoteza o koloidalnom obliku razrijeđenih aluminatnih otopina, kao i hipoteza o stvaranju prave soli, ne mogu održati. Tako *Beljajev*[59]) na osnovu radova *Strokova*[62]) drži, da su aluminatne otopine, zbog specifičnih pojava, kompliciraniji sistemi nego obične solne otopine. Ovo shvaćanje Beljajeva upućuje već na mogućnost, da postoje kompleksni ioni, iako to sam autor nije naročito naglasio. Ako se prihvati formula $NaHAlO_2$, može se izlučivanje $Al(OH)_2$ objasniti samo hidrolizom. Korak dalje ide *Werner*[29]), koji aluminatima u vodenoj otopini pripisuje kompleksni anion $[(Al(OH)_4]^-$. U tom se slučaju proces razlaganja može tumačiti kao raspadanje kompleksne soli, koje nastaje djelovanjem hidratnog cjepiva zbog prekoračenja ravnoteže topljivosti, pri čemu hidroliza ima samo sporedan značaj. Međutim, tako predloženoj Wernerovoj formuli posvećena je u literaturi vrlo malena pažnja. Wernerovo gledište zastupa i *Heyrovsky*[30]), koji stabilnost kompleksnog iona $[Al(OH)_4]^-$ osniva na prisutnosti 4 hidroksilne grupe u prvoj Wernerovoj koordinacionoj sferi. Isto stajalište zastupaju *Harasymenko*[31]), *Meerwein*[32]) i *Remy*[33]). U radovima *Bauermeistera*[34]) govori se o odnosima ravnoteže hidrata u lužinama, a podatke o odnosima ravnoteže pri procesu razlaganja daju u svojem radu[35]) *Bauermeister* i *Fulda*.

11. HIDROLITIČKA RAVNOTEŽA U TEHNIČKIM ALUMINATNIM OTOPINAMA

Da bismo odredili ulogu hidrolitičkih procesa pri razlaganju aluminatnih otopina, potrebna su slijedeća razmatranja. Ako se, po Werneru, pretpostavi, da razrijeđene aluminatne otopine sadržavaju anione $[Al(OH)_4]^-$, onda formula natrijskog aluminata glasi $Na[Al(OH)_4]$. Kod prave hidrolize natrijske aluminatne otopine dolaze u obzir ove pojedinačne reakcije:

$$Na[Al(OH)_4] \rightleftarrows Na^+ + [Al(OH)_4]^- \quad (1)$$

$$[Al(OH)_4]^- + HOH \rightleftarrows H[Al(OH)_4] + OH^- \quad (2)$$

$$H[Al(OH)_4] \rightleftarrows H^+ + [Al(OH)_4]^- \quad (3)$$

$$HOH \rightleftarrows H^+ + OH^- \quad (4)$$

Kao stupanj hidrolize označava se dio natrijskog aluminata, koji s vodom, ili bolje rečeno s H^+ -ionima vode, stvara $Al(OH)_3$.

$$\beta = \frac{[Al(OH)_3]}{[c]}$$

gdje $[Al(OH]_3$ znači molarnu koncentraciju hidrolizom nastaloga aluminijskog hidroksida, a [c] molarnu koncentraciju otopljenoga aluminata.

Jednadžba (2) prikazuje hidrolitičku ravnotežu. Ona je dana konstantom hidrolize

$$K_{hidr} = \frac{[HAl(OH)_4] \cdot [OH^-]}{[Al(OH)_4]^- \cdot [HOH]} \quad (5)$$

Konstanta disocijacije jednobazične aluminijske kiseline dana je sa

$$K_{H_x} = \frac{[H^+] \cdot [Al(OH)_4]^-}{[HAl(OH)_4]} \quad (6)$$

Između konstante disocijacije i konstante hidrolize postoje, kako se lako može pokazati, ovi odnosi. Iz jednadžbe (6) dobiva se

$$[Al(OH)_4]^- = \frac{K_{H_x}}{[H^+]} \cdot [HAl(OH)_4].$$

Iz jednadžbe (5) izlazi

$$[Al(OH)_4]^- = \frac{[OH^-] \cdot [HAl(OH)_4]}{K_{hidr}}.$$

Iz toga slijedi za konstantu disocijacije

$$K_{H_x} = \frac{[H^+] \cdot [OH^-]}{K_{hidr}} \quad (7)$$

gdje je $[H^+] \cdot [OH^-] = P_{H_2O}$ i znači ionski produkt vode. Za K_{hidr} dobiva se prema tome

$$K_{hidr} = \frac{[H^+] \cdot [OH^-]}{K_{H_x}} \quad (8)$$

Wood[36]) je konstantu disocijacije odredio iz konstanata hidrolize razrijeđenih alkaličnih aluminatnih otopina. Ravnoteža, postignuta nakon četiri sedmice kod 25° C, smatrala se kao konstantna. Stupanj hidrolize iznosio je 35%, pa je konstanta disocijacije bila $K_{H_x} = 6{,}3.10^{-13}$ (25° C). *Blum*[37]) je dobio znatno veći rezultat, i to potenciometrijskom titracijom otopine aluminijskog klorida s natrijskom lužinom, pri čemu je kod »aluminatnog skoka« koncentracija H^+-iona iznosila $10^{-10,5}$. Ova je vrijednost bila uvrštena u jednadžbu (6). Molarna koncentracija $[HAl(OH)_4]$ bila je tada jednaka vrijednosti, koja se našla pri »aluminatnom skoku« za $OH^- = 10^{-3,5}$. Za $[Al(OH)_4]^-$ stavljena je koncentracija $Na[Al(OH)_4] \cdot 0{,}8$ s pretpostavkom, da je 80% natrijskog aluminata ionizirano. Za konstantu disocijacije K_{H_x} dobivena je onda vrijednost $5{,}0.10^{-8}$.

Kod *Woodove* vrijednosti treba primijetiti ovo. Čim se kod aluminatnih otopina zbog hidrolize izluči aluminijski hidroksid, on dalje djeluje na raspadanje aluminatne otopine, pa se prema tome više ne radi o pravoj hidrolitičkoj ravnoteži. Izlučivanje $Al(OH)_3$ započinje doduše hidrolizom, ali dalje raspadanje aluminatne otopine ne slijedi više samo na osnovu hidrolitičkog procesa. Stoga je razumljivo, da je vrijednost konstante disocijacije po Woodu znatno manja (jer je pretpostavljen i manji stupanj hidrolize) nego ona vrijednost, koja je određena po Blumu, drugom metodom.

Sva određivanja konstante disocijacije jednobazične aluminijske kiseline, koja su navedena u literaturi, daju veće vrijednosti, ako se to određivanje nije vršilo mjerenjem stupnja hidrolize. *Fricke* nalazi sličnu vrijednost kao *Blum*, a *Treadwell*

i *Zürcher*[23]) nalaze vrijednost za konstantu disocijacije 10^{-10}. Pri tomu treba uzeti u obzir, da se vrijednosti za konstantu disocijacije, zbog različitog stepena starosti hidrata, prilično kolebaju.

Maffei[38]), koji je na osnovu mjerenja vodljivosti alkaličnih aluminatnih otopina proračunao vrijednost za K_{Hx} sa 6.10^{-12}, morao je isto tako dobiti manju vrijednost, jer se zbog otapanja aluminata oslobađaju OH^--ioni, zbog čega nastaje jača hidroliza. To se odražava i u većoj vodljivosti (vidi pogl. 12.: Polimerizacija aluminatnih iona). Ipak, i u onom slučaju, kad se vrijednost konstante disocijacije, koju je našao Wood, uvrsti u jednadžbu (8), rezultati izračunanog stupnja hidrolize ne zadovoljavaju prema efektivno postignutom izlučivanju aluminijskog oksihidrata u procesu razlaganja

$$K_{hidr} = \frac{P_{H_2O}}{K_{H_x}} = \frac{1{,}27.10^{-14}}{6.3.10^{-13}} = 2{,}01.10^{-2}$$

Ako se zatim izračuna stupanj hidrolize neutralne aluminatne otopine (s pretpostavkom da je stabilan) po jednadžbi

$$\beta = \sqrt{\frac{K_{hidr}}{C}} \left(\sqrt{1 + \frac{K_{hidr}}{4C}} - \sqrt{\frac{K_{hidr}}{4C}} \right) \qquad (9)$$

tada se za normalnu aluminatnu otopinu dobiva stupanj hidroliza 13,12% (25° C), a za n/10-aluminatnu otopinu stupanj hidrolize 29,5% (25° C).

Kod tehničkog dobivanja aluminijskog hidrata po Bayerovu postupku razlažu se jače alkalične otopine, jer bi inače raspadanje otopine moglo započeti prije nego se provede proces razlaganja. Ako postoji na pr. aluminatna otopina sa 102 g/l Al_2O_3 i 120 g/l Na_2O, onda to odgovara hidroksilnoj koncentraciji (računato na slobodni Na_2O) od $120 - 61{,}99 = 58{,}01$ g/l, odnosno $\frac{58{,}01}{61{,}99} = 0{,}937$ mol/l.

Zbog prisutnosti hidroksilnih iona bit će, naravno, hidroliza jako potisnuta (vidi jednadžbu 5.). Još će niži biti stupnjevi hidrolize, ako se za proračun upotrebe konstante disocijacije dobivene drugim metodama.

Zaključno se može kazati, da pri razlaganju alkaličnih aluminatnih otopina, kakve se primjenjuju kod Bayerova postupka s molarnim odnosom $Al_2O_3 : Na_2O = 1 : 1{,}8—2{,}0$, hidroliza ima podređenu ulogu, i to zato, jer iskorištenje, koje se postiglo pri razlaganju, ne stoji ni u kakvom razmjeru s jakošću aluminijske kiseline.

12. IZLUČIVANJE ALUMINIJSKOG HIDRATA PREMA TEORIJAMA O STVARANJU KLICA I BRZINI KRISTALIZACIJE

a) *Stanje prekoračenja*

Radovi, koje su objavili *Fricke* i *Jucaitis*[25]), o ravnoteži, koja nastaje otapanjem hidrargilita u NaOH, sadržavaju zanimljiv podatak. Iz aluminatnih otopina, ako je koncentracija Na_2O veća od 22%, nastaje kao taložna supstanca natrijski aluminat, a ispod te granice uvijek se taloži $Al(OH)_3$. Ovaj eksperimentalni nalaz ukazuje, da samo kod koncentriranih aluminatnih otopina (više od 22% Na_2O) postoje otopljene molekule $NaAlO_2$, a s postepenim razređenjem otopine počinje stvaranje »solvatnih kompleksa«. Pod solvatnim kompleksom razumijeva se labavi kemijski spoj, koji je vjerojatno nastao djelovanjem sila elektrostatičke prirode. Iz odnosa stabiliteta moglo bi se zaključiti, da su ovi solvati sastavljeni od labavih kompleksa molekula.

Sasvim formalno može se ovakav prijelaz iz čistog aluminata u solvatni kompleks prikazati formulom

$$NaAlO_2 + nH_2O \rightleftarrows Na[AlO_2 \cdot nH_2O]$$

ako je $n = 2$, dobiva se

$$NaAlO_2 + 2\,H_2O \rightleftarrows Na\,Al(OH)_4.$$

Proces razlaganja može se tada smatrati kao jednostavno raspadanje kompleksa pod utjecajem hidratnog cjepiva.

$$Na[Al(OH)_4] \rightarrow Al(OH)_3 + NaOH.$$

Kao što je već spomenuto (vidi pogl. 10.), ustanovljeno je, da svježe priređene aluminatne otopine, obratno od onih, koje su dulje vremena stajale (pretpostavlja se, da se za to vrijeme ne izdvaja hidrat), pokazuju manju vodljivost i manje sniženje ledišta. Pri razlaganju izlučeni hidrat i porast vodljivosti ne teku paralelno. Ta se pojava većinom svodi na peptizaciju aluminijskog hidrata u aluminatnoj otopini. S druge strane eksperimentalno uobičajenim sredstvima nije pošlo za rukom da se potvrdi postojanje takvog sola. Mnogo je prihvatljivije tumačenje, da aluminati naginju polimerizaciji, što je *Heyrovsky*[44]) eksperimentalno lako dokazao kod litijskog aluminata. Aluminijska je kiselina u uskom srodstvu s bornom kiselinom, što se odrazuje u sličnosti konstante disocijacije.

Aluminatni ion $[Al(OH)_4]^-$ ima tendenciju, da u razrijeđenim otopinama polimerizira prema jednadžbi

$$2\ [Al(OH)_4]^- \rightleftarrows Al_2(OH)_7^- + OH^-$$

što se odražava u povećanju vodljivosti i sniženju točke ledišta. Ovo dovoljno objašnjava, zašto porast vodljivosti i izlučivanje aluminijskog hidrata ne teku paralelno.

Raspadanje solvatnih kompleksa, s obzirom na stabilitetne odnose, jasno je sa stajališta termodinamike. Na osnovu topljivosti hidrargilita u natrijskoj lužini može se, naime, pokazati, da je aluminatna otopina, koja se razlaže po Bayerovu postupku, prema hidrargilitu ili bajeritu kao taložnoj supstanciji, nestabilna ili prezasićena. Pri tomu se može, jednostavnosti radi, posve formalno aluminatna otopina smatrati za otopinom aluminijskog oksihidrata u 4nNaOH.

U dijagramu na sl. 8. točke topljivosti $Al(OH)_3$, u području temperature između 20° i 60° C, leže na pravcu, koji predstavlja liniju koegzistencije stabilne aluminatne otopine (I) i nestabilne aluminatne otopine (II). Nestabilna aluminatna otopina pada u područje prekoračenja. Uzme li se u dijagramu na sl. 8. jedna točka u području prekoračenja (II) i doda li se otopini nekoliko aktivnih klica cjepiva, principijelno će se izlučivati aluminijski oksihidrat tako dugo, dok se ne dostigne linija koegzistencije. Kod tehničke provedbe Bayerova procesa dolazi se u područje II na taj način, da se boksit raščinjava pri višim temperaturama s lužinom, koja sadržava 290—300 g/l Na_2O. Pri tom se otapaju hidrati aluminijskog oksida. Nakon raščinjavanja otopina se razređuje tako, da sadrži 100 g/l Al_2O_3, čime se topljivost hidrata u aluminatnoj otopini jako smanjuje. Kod 100° C postoji još, po *Bauermeisteru*[34]), stabilno stanje. Razlaganje se vrši kod nižih temperatura, pa se zbog toga aluminatna otopina hladi. Prekoračenje linije koegzistencije postizava se podhlađivanjem. Stepen prezasićenosti može se proračunati po *Volmeru*[15]), a prema *Gibbsu*, iz razlike termodinamičkih potencijala kod konstantne temperature.

Za termodinamički potencijal zasićene otopine vrijedi

$$\mu_I = \mu_0 + RT\ln c_s$$

gdje c_s znači koncentraciju zasićenja.

Za termodinamički potencijal prezasićene otopine vrijedi

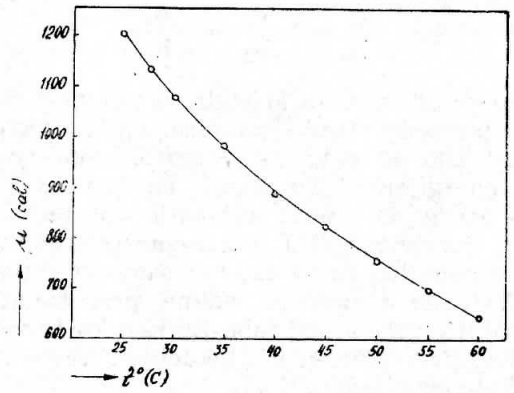
$$\mu_{I/II} = \mu_0 + RT\ln c.$$

gdje c znači koncentraciju prezasićene otopine.

Stepen prezasićenosti može se izraziti razlikom obaju termodinamičkih potencijala

$$\mu_{I/II} - \mu_I = RT\ln\frac{c}{c_s} \qquad (10)$$

Razlika $\mu_{I/II} - \mu_I$ ima značenje reverzibilne radnje, koju sistem vrši pri prijelazu iz stanja II u stanje I. Strogo uzevši, za proračunavanje termodinamičkog potencijala treba staviti aktivitete umjesto koncentracija. Ove su vrijednosti proračunate za koncentraciju c = 100 za različite temperature i unesene su u dijagram sl. 11.



Sl. 11. Termodinamički potencijali prekoračenja pri različitim temperaturama

b) *Stvaranje klica*

Za pravi je kristalizacioni proces karakteristično, da se pri izlučivanju pojavljuje znatan toplinski efekt. Veoma je važna činjenica, da izlučeni kristali hidrata predstavljaju već prisutne granične površine. Svatko, tko ima praktičnog iskustva s provođenjem Bayerova postupka, može potvrditi, da se kod pripremanja hidratnog cjepiva, koje se izlučuje pri niskim temperaturama, opaža znatno povišenje temperature. Oba se pojava mogu objasniti, prema novijim teorijama o stvaranju faza, na ovaj način.

Po *Volmeru*[15]) i *Gibbsu* može se kazati, da je prekoračenje stabiliteta neke faze moguće zbog toga, što se kod stvaranja nove faze uvijek mora vršiti radnja.

Gibbs je, a kasnije na drugi način i *Volmer*, teoretskim putem izveo vrijednost za radnju pri stvaranju klica. Ta vrijednost iznosi za kristale

$$A_K = 1/3\ \Sigma\sigma_i\ O_{iK} \tag{11}$$

gdje σ_i znači slobodnu površinsku energiju (napetost površine), O_i površinu klice. Izraz $\Sigma\sigma_i O_{iK}$ znači algebarsku sumu umnoška svih površinskih energija prema otopini s površinom svih klica. Vrijednost σ_i nije kod svih površina klica jednaka, nego svaka površina čestice ima drugu vrijednost σ.

Odnos između pojedinih vrijednosti za σ daje *Wulfova*[45]) jednadžba

$$\frac{\sigma_1}{h_1} = \frac{\sigma_2}{h_2} = \frac{\sigma_3}{h_3} \tag{12}$$

što znači, ako se od središta kristala, u položaju ravnoteže, na sve granične površine spuste okomice, onda su pojedine udaljenosti od središta do površine proporcionalne odgovarajućim površinskim energijama. To znači, da površine s najvećom površinskom energijom imaju najmanje oplošje.

Međutim, jednadžba (12) ima malu praktičnu vrijednost, jer se eksperimentalno može mjeriti samo srednja površinska energija σ. Veličina σ može se naime proračunati iz odnosa topljivosti malih i velikih kristala. Za razliku termodinamičkih potencijala kapljice radijusa r i tekućine s ravnom površinom vrijedi, po Volmeru, jednadžba

$$(\mu_r - \mu_\infty) = \frac{2\sigma}{r}\,v \tag{13}$$

gdje σ znači napetost površine, a v molarni volumen.

Ako se jednadžba (13) primijeni na kristale, s pretpostavkom, da vrijedi zakon o idealnim plinovima, ona glasi

$$RT \ln \frac{p_{h_i}}{p_\infty} = \frac{2\sigma_1}{h_1}\,v = \frac{2\sigma_2}{h_2}\,v \tag{13a}$$

Ako se mjesto napetosti para stavi topljivost, dobije se jednadžba analogna *Thomsonovoj*[46])

$$RT \ln \frac{L'}{L} = \frac{2\sigma}{r}\,v \tag{14}$$

gdje L' znači topljivost fino disperznog hidrata radijusa r, a L topljivost grubog hidrata.

Kod primjene jednadžbe (14) mora se imati na umu, da je ona samo približna, jer pretpostavlja valjanost osmotskih zakona, koji vrijede samo za razrijeđene otopine. Nadalje se pretpostavlja, da su σ i v konstantni, što nije vjerojatno, ako se radi o malim i velikim kristalima. Ipak se može gornja jednadžba upotrebiti za približno određivanje σ, da bi se s dobivenom vrijednošću mogao dobiti red veličine za radnju, koju treba upotrebiti pri stvaranju klica. Vrijednost σ bila bi

$$\sigma = \frac{158 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 32{,}22} \approx 1250\ \text{erga/cm}^2$$

Radnja pri stvaranju klica može se usporediti s energijom aktivacije, a njena vrijednost može biti mjerilo za kinetičku stabilnost sistema u stanju prekoračenja, u odnosu prema stvaranju nove kristalinične faze. U ovom se slučaju mora naročito uzeti u obzir, da se visoki stepen prekoračenja ne može objasniti velikom radnjom, koja je potrebna za stvaranje klica. Svakako se moraju uzeti u obzir i one sile aktivacije, koje su potrebne da se izazove reakcija raspadanja

$$Na[Al(OH)_4] \rightarrow Al(OH)_3 + NaOH$$

Nadalje se mora uzeti u obzir niski koeficijent difuzije aluminatnih otopina prema drugim prezasićenim vodenim otopinama. Svaka pojava, koja smanjuje radnju pri stvaranju klica, mora izazvati ubrzanu kristalizaciju. Stoga osobito značenje imaju rubovi izlučivača, miješala, pa termometri, koji su uronjeni u otopinu. Isto djelovanje imaju čestice prašine, čestice fino dispergiranoga crvenog mulja, koje su zbog nepotpune filtracije ostale u otopini. Naročito povoljan granični slučaj nastaje, kad za smanjenje radnje pri stvaranju klica služe sami kristali hidrata. Tada će površinska energija na mjestu rasta biti jednaka nuli, a klica može sa znatnim smanjenjem radnje izrasti u gotov kristal.

c) *Pojedinačne pojave faza pri procesu razlaganja*

Značenje hidratnog cjepiva za kinetiku procesa razlaganja proizlazi iz izloženih [u prijašnjoj točki b)] zakona o stvaranju klica, kao i iz povoljnog utjecaja, koji na njihovo stvaranje imaju mali kristali, sposobni za rast. Međutim samo time ne mogu se objasniti sva opažanja, koja se mogu uočiti u pojedinim vremenskim intervalima procesa razlaganja.

Prije svega se mora istaknuti praktično iskustvo, da hidratno cjepivo ne smije biti ni prekrupno, ni presitno.

Upotrebom pregrubog hidrata teče proces razlaganja suviše sporo, pa je zbog toga potrebna velika količina cjepiva; prejako disperznim hidratom postizava se doduše brzina, koja zadovoljava, ali je izlučeni hidrat odviše sitan, pa tehnički ne odgovara, jer se pojavljuju teškoće pri filtraciji, a kod kalcinacije nastaju zbog prašenja materijala veliki gubici.

Moglo bi se očekivati, da će se moći utjecati na veličinu zrna izlučenoga hidrata upotrebom vrlo finog cjepiva na taj način, da se cijepi vrlo malim količinama takvog cjepiva, kako bi ono u otopini imalo mogućnost za normalan rast. Ta pretpostavka, međutim, ne odgovara stvarnosti. U dijagramu sl. 2. prikazana krivulja 2 odgovara cijepljenju sa svega 0,15 vol. % vrlo fino dispergiranog hidrata. U praksi se cijepi sa mnogo većom količinom cjepiva, pa je ipak izlučeni hidrat vrlo fin. Prema tome, osim rasta kristala hidratnog cjepiva, koje se dodaje aluminatnoj otopini, značajna je još jedna važna pojava.

Kod određivanja uvjeta, koji su potrebni da nastane hidrargilit, utvrđeno je, da se pri reakcionim odnosima, kakvi vladaju u procesu razlaganja po Bayeru, hidrargilit izlučuje i onda, kad se cijepljenje vrši bajeritom. U tom slučaju nastaje zapravo smjesa hidrata, koja se sastoji od hidrargilita i bajerita. *Fricke* je zatim opazio, ako postoje uvjeti za stvaranje bajerita (brzo izlučivanje), da on nastaje čak i onda, kad se cijepljenje vrši hidrargilitom. Obje se pojave mogu protumačiti samo tako, da kristalinično cjepivo, uneseno u aluminatnu otopinu, raste dalje zadržavajući svoju kristalinčnu strukturu, ali da ono u isto vrijeme u otopini stvara hidratni sol, koji se već prema uvjetima stvaranja razvija u hidrargilit ili bajerit. Ne može se prihvatiti, da će već izgrađeno kristalinično cjepivo u otopini prijeći u svoju polimorfnu formu, jer pretvorba bajerita u hidrargilit teče vrlo sporo. Međutim, vrlo je vjerojatno, da će se čestica sola, koja je odvojena od kristala i još nepotpuno izgrađena, pretvoriti u takvu modifikaciju, kojoj odgovaraju reakcioni uvjeti otopine.

Ako se prihvati takvo tumačenje, onda je razumljivo, zašto se sa mnogo manjim količinama fino disperznog cjepiva postizava isto djelovanje kao i s velikim količinama grubo disperznoga. Kod grubo disperznog hidrata proces je kristalizacije već gotovo dovršen, te postoji mala mogućnost odvajanja sola, i zato su potrebne velike količine cjepiva, a fino disperzno hidratno cjepivo može se, naprotiv, cijepati na manje čestice sola. Ako je hidrat suviše disperzan, tako da se nalazi gotovo u amorfnom stanju, on šalje u otopinu previše čestica sola, pa zbog toga nastaje jako dispergirani hidrat.

Za potvrdu ovog gledišta treba navesti još jedan dalji rezultat pokusa. Dijagram sl. 3. prikazuje rezultate onih pokusa, koji su se vršili s hidratnim cjepivom I, pripremljenim na različite načine. Krivulje 2 i 3 odgovaraju izlučivanju hidrata kod upotrebe sušenoga hidratnog cjepiva. Ovaj eksperimentalni nalaz potvrđuje gore navedenu pretpostavku. Sušeno hidratno cjepivo manje je podesno za stvaranje sola nego ono, koje je nakon pripreme sačuvano nefiltrirano u razmuljenom stanju. Zbog toga kod upotrebe sušenoga hidratnog cjepiva nastaje sporo izlučivanje.

Prema tome se djelovanje hidratnog cjepiva može objasniti tako, da njegova prisutnost smanjuje radnju, koja je potrebna za stvaranje klica. Uneseni kristali hidrata u otopini se razvijaju u krupnije kristale, a u isto se vrijeme odvajaju u otopinu čestice sola, koje djeluju kao klice, i već prema svojem broju izrastaju u kristalinične hidrate različitog disperziteta. Prema *Weygandovoj*[47]) definiciji to odgovara prisilnom stvaranju klica.

d) *Proces rasta kristala*

Ako nastaje nova faza kod tipa reakcije AB (tekuće) → A (čvrsto) + B (tekuće), moraju se razlikovati dva dijela procesa, koji su kinetički različiti, i to brzina stvaranja klica i brzina kristalizacije. Odnos obiju brzina određuje disperznost nove faze, jer oba faktora djeluju suprotno. Brzina stvaranja klica jako je ovisna o količini i prirodi cjepiva, što nužno proizlazi iz prije navedenih razmatranja. Pod brzinom kristalizacije razumijeva se brzina linearnog rasta kristala okomito na određenu kristalnu površinu. Ona se može, za razliku od brzine stvaranja klica, izraziti u apsolutnim mjerama. Razumljivo je, da kod supstancije s velikom brzinom kristalizacije broj klica, t. j. broj kristalizacionih centara na jedinicu volumena, nema za strukturu nove faze tako veliko značenje kao u onom slučaju, kad je brzina stvaranja klica veoma velika. Budući da su pri procesu razlaganja i brzina stvaranja klica i brzina kristalizacije veoma spore, to obje veličine moraju međusobno stajati u pravilnu odnosu. Praktički je najpovoljniji odnos onda, kad je hidratno cjepivo fino disperzno, t. j. kad donja granica veličine zrna iznosi $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ cm. Kod te veličine zrna dovoljna je za cijepljenje količina od 1,5—3,0 vol. % lužnatog cjepiva. Ispod te granice izlučeni je hidrat suviše sitan. Uputno je, da se »aktivitet« cjepiva ispita određivanjem njegove topljivosti u 4nNaOH (vidi dijagram sl. 8.).

Može se uzeti, da su elementarni procesi rasta kristala principijelno povoljno riješeni. Oni su objašnjeni u radnjama *Kossela*[43]), *Stranskoga*[49]) i *Volmera*[15]).

Međutim, unatoč relativno velikom prekoračenju, mala brzina kristalizacije pri izlučivanju hidrata ne može se tumačiti tako jednostavno. Ona se ne može potpuno objasniti ni relativno malim difuzionim koeficijentom otopine, ni velikim difuzionim slojem na granici kristala. Najvjerojatnija je pretpostavka, da je stvaranje hidrata vezano s velikim steričkim smetnjama. Isto tako i obratni pojav, t. j. otapanje hidrata u lužini, teče veoma sporo (vidi dijagram sl. 9.). Kod mjerenja ravnoteže hidrargilita i vodene pare *Fricke* i *Severin* su opazili neobično sporo izjednačenje tlaka para, što su doveli u vezu s velikom toplinom aktivacije i steričkim smetnjama. Pitanje naravi otopine bit će obrađeno u poglavlju 15.

Krupno disperzni kristali hidrata dobivaju se obično kod više temperature (50°—60° C). Ova se temperatura može primijeniti u početku procesa razlaganja, jer je prekoračenje dosta veliko, a brzina izlučivanja hidrata ovisna je o stepenu prezasićenja (vidi pogl. 13.). Kasnije se temperatura svakako mora sniziti, jer bi proces razlaganja zbog nedovoljnog prezasićenja tekao suviše sporo. U praksi se temperatura regulira laganim ohlađivanjem. Aluminatna otopina uvodi se u izlučivače s naznačenom temperaturom i hladi se do svršetka procesa, već prema volumenu posude, tako da se temperatura snizi za 10—15° C.

Skrativši i jako pojednostavivši računske operacije, *Volmer*[15]) je za djelomice teško rastopljive taloge dao formulu za srednji volumen čestica, koje su se izlučile:

$$\overline{V} \approx K_1 \cdot e^{\left(\frac{K_2}{\ln \frac{c_I}{c_s}}\right)^{6/5}} \qquad (15)$$

gdje su $\overline{V}$ srednji volumen čestica, K_1 i K_2 konstante karakteristične za svaku pojedinu supstanciju, c_I koncentracija na početku reakcije, c_s koncentracija zasićenja, e baza prirodnih logaritama.

Iz formule se vidi, da je veličina čestica, koje nastaju pri taloženju, ovisna samo o odnosu $\frac{c_I}{c_s}$, t. j. da kod iste početne koncentracije otopine (c_I) čestice bivaju to manje, što je manja njihova topljivost u odnosnom otapalu.

Povišenje temperature djeluje povoljno na izlučivanje većih čestica, jer se povišenjem temperature povećava topljivost hidrata u lužini, kao što se to vidi iz jednadžbe (17). Ipak su taložne frakcije drugoga i trećeg dana razlaganja finije (vidi pogl. 9.), unatoč smanjenju odnosa $\frac{c_I}{c_s}$, pa i onda, kad se taložna frakcija nakon prvog dana razlaganja ukloni iz izlučivača. Tu treba uzeti u obzir, da se koncentracija OH^- iona u otopini za vrijeme procesa i dalje mijenja, tako da povišenje temperature može vjerojatno djelovati ne samo na povećanje topljivosti, već i na promjenu veličina K_1 i K_2. Ovaj primjer jasno pokazuje, da veličina čestica nije ovisna samo o odnosu koncentracija $\frac{c_I}{c_s}$, već da kod toga djeluju i drugi važni faktori. Prema postavkama *Habera*[50]), s kojima se *Volmer*[15]) ne slaže, moglo bi se to kvalitativno tumačiti smanjenjem brzine redanja zbog promjene temperature i koncentracije OH^- iona. Haberova se postavka ne može međutim kvantitativno formulirati, jer nedostaje točna fizikalna definicija brzine redanja. U praksi je vrlo važno, da se dobije što grublji i jednoličniji hidrat. Stoga se u mnogim tvornicama glinice omogućuje dalji rast hidratnih čestica, koje su se izlučile u drugom dijelu procesa razlaganja. To se može izvršiti na jednostavan način tako, da se s pomoću naročitih separatora fine čestice hidrata vraćaju natrag u pogon i miješaju sa svježom aluminatnom otopinom, koja je namijenjena razlaganju. Na kraju, cijeli proces razlaganja može biti modificiran tako, da se cijepljenje vrši samo hidratom.

Naravno, kod takvog su »cijepljenja« potrebne mnogo veće količine hidrata nego kod upotrebe specijalno pripremljenih cjepiva. Razlozi za to već su prije navedeni. Zbog toga se u mnogim zemljama ponovo počelo raditi po Bayerovu patentu, prema kojemu se kao supstancija za cijepljenje upotrebljava već izlučeni hidrat, tako da nastaje kontinuirani kružni proces.

13. PROCES RAZLAGANJA KAO KATALITIČKI POJAV

Već pri sasvim formalnom kinetičkom promatranju procesa razlaganja vidi se, da je djelovanje hidratnog cjepiva katalitičko, jer različita cjepiva utječu na skraćivanje vremena razlaganja različito. U literaturi je već nekoliko puta ukazano na povezanost između katalize i procesa rasta kristala[51]).

Prema tome su »aktivna mjesta« katalizatora[52]) identična s onim mjestima, na kojima se naročito pojavljuju procesi rasta

kristala ili procesi otapanja. Po *Stranskom*[53]) se i sami katalitički procesi mogu promatrati kao pojave rasta kristala, pri čemu kristali djeluju kao katalizatori na taj način; što na njima nastaje prolazno nagomilavanje reakcionih komponenata.

Iz dijagrama sl. 3. može se najbolje razabrati, da proces razlaganja mnogo ovisi o sposobnosti rasta kristaliničnog cjepiva. Hidratno cjepivo, dobiveno sušenjem, usporuje izlučivanje ne samo time, što ne može lako slati u otopinu čestice sola, već i zato, što nema sposobnosti rasta, a to se vidi po tome, što nastaje fino disperzan hidrat. Naravno, i grubo disperzno hidratno cjepivo, kad se upotrebi kao cjepivo, gubi svoju sposobnost rasta, i tada djelovanjem cijepljenja nastaje druga navedena elementarna pojava. Zato je kod pripreme aktivnih hidratnih cjepiva vrlo važno, da se održi sposobnost rasta hidratnog cjepiva, kako ne bi prevagnuo drugi elementarni pojav, t. j. stvaranje čestica sola.

Brzina izlučivanja aluminijskog hidrata može se prikazati jednadžbom, koja je određena empirički, i to u slučaju, ako se razlaganje provodi pri konstantnoj temperaturi i ako se cijepi s dosta hidratnog cjepiva (srednji aktivitet — hidratno cjepivo I), i to

$$\frac{c_x}{\tau} = k(\delta - c_x)\,. \qquad (16)$$

Kod toga je $\delta = c_A - L$ prekoračenje otopine, gdje c_A znači početnu koncentraciju, a L topljivost hidrate kod određene temperature razlaganja. c_x je količina izlučenog hidrata nakon vremena τ (u satima). Ispravnost jednadžbe (16) prikazuje tabela 4.

TABELA 4.

τ	c_x	$k = \frac{c_x}{\tau(\delta - c_x)}$
1	2	3
24	32	2,77.10^{-2}
48	47	2,96.10^{-2}
72	54	2,88.10^{-2}
96	57,5	2,66.10^{-2}

Kolona 1 sadrži vrijeme τ u satima, kolona 2 količinu izlučenog hidrata c_x preračunatu u Al_2O_3 g/l, kolona 3 vrijednosti za k

izračunate prema jednadžbi (16). Razlaganje se vršilo kod temperature od 35° C, a cijepilo se sa 6 vol % hidratnog cjepiva I. δ je bio 80.

Izraz $\frac{c_x}{\tau}$ ne smije se zamijeniti diferencijalnim razlomkom $\frac{dc_x}{d\tau}$, jer bi se inače proces razlaganja mogao smatrati reakcijom I. reda. Ako se integrira diferencijalna jednadžba reakcije prvog reda

$$\frac{dc_x}{d\tau} = k(\delta - c_x) \qquad (17)$$

dobiva se

$$k = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\delta}{\delta - c_x} \qquad (18)$$

Izračuna li se k prema jednadžbi (18), dobivaju se različite vrijednosti. Proces razlaganja ne može se smatrati za reakciju nekoga određenog reda, jer za to nedostaje fizikalna podloga. Konstanta brzine k, dobivena iz jednadžbe (16), ne prikazuje pravu konstantu raspadanja k_w jednoga spontanog procesa, već konstantu brzine katalitičkog procesa, izazvanog hidratnim cjepivom. Konstanta k ovisi o aktivitetu i količini hidrata, upotrebljenog za cijepljenje. Odnos između k_w i k nije jednostavan, niti ga je teoretski lako obuhvatiti.

Upotrebom vrlo aktivnoga hidratnog cjepiva (vidi dijagram sl. 2., krivulja 2) dobiva se takav tok brzine, da bi se reakcija mogla smatrati za reakciju prvoga reda. Krivulja 1 dijagrama sl. 2. ne bi više zadovoljavala jednadžbu (18), iako se u oba slučaja može računati s istim kemizmom reakcije. Bilo bi, dakle, potpuno pogrešno iz toka brzine katalizirane reakcije stvarati zaključke o mehanizmu procesa raspadanja. Prema tome, jednadžba (16) ima samo formalno značenje. Dimenzija konstante k u jednadžbi (16) jest τ^{-1}. Konstanta k zapravo je konstanta brzine procesa razlaganja. Poznavanje faktora, koji uvjetuju vrlo lagan tok kristalizacije aluminijskog oksihidrata u usporedbi s ostalih kristalizacionim pojavama, ima veliko teoretsko i praktičko značenje. Radi toga je veoma važno poznavati ovisnost konstante k o temperaturi, jer se onda može izračunati toplina aktivacije procesa. Pokusi, izvedeni kod različitih temperatura, daju ovisnost konstante k o temperaturi. U prvih 12 do 24 sata opaža se, da između temperatura od 25° i 45° C brzina izlučivanja raste s temperaturom. Nakon 24 sata

izlučivanja nastaje obrnuta pojava, jer je kod viših temperatura manja prezasićenost. Kod temperatura od 35°, 40° i 45° C dobivene su nakon 12-satnog razlaganja (cijepljeno sa 2,14 vol % hidratnog cjepiva I) niže navedene količine izlučenog hidrata, preračunate na Al_2O_3 g/l (vidi tabelu 5.).

TABELA 5.

°C	Al_2O_3 g/l	$\frac{c_x}{\tau}$	k
1	2	3	4
35	16	$\frac{16}{12} = 1{,}33$	0,0208
40	18	$\frac{18}{12} = 1{,}50$	0,0258
45	20	$\frac{20}{12} = 1{,}66$	0,0314

Vrijednost konstante k, koja je dana u tabeli 5., izračunata je iz jednadžbe (16).

Ovisnost konstante k o temperaturi dana je u većini slučajeva dosta točno Arrheniusovom jednadžbom

$$k = C \cdot e^{-\frac{A_w}{RT}}$$

odnosno

$$\log k = -\frac{A_w}{4{,}573 \cdot T} + \log C \qquad (19)$$

gdje je A_w toplina aktivacije kataliziranog procesa, a C konstanta, koje će fizikalno značenje biti još spomenuto. Ako uzmemo, da su obje veličine, A_w i C, u intervalu temperature 35—40° C konstantne, onda vrijedi za

$$\log \frac{k_2}{k_1} = \frac{A_w (T_2 - T_1)}{4{,}573 \cdot T_2 \cdot T_1}$$

odnosno

$$A_w = \frac{\log \frac{k_2}{k_1} \cdot 4{,}573 \cdot T_2 \cdot T_1}{T_2 - T_1} \qquad (20)$$

Ako se odgovarajuće vrijednosti stave u jednadžbu (20), dobiva se u našem slučaju za energiju aktivacije vrijednost

$$\frac{0{,}09356 \cdot 4{,}573.313.308}{5} = 8{,}24 \text{ kcal} .$$

Kako je vrijednost konstante

$$k = C \cdot 10^{-5{,}8575}$$

dobivamo za

$$C = \frac{0{,}0208}{10^{-5{,}8575}} \text{ , a } \log C = 4{,}1756$$

Konstanta C, koja je kod homogenih reakcija zapravo faktor učestalosti izvršenih sudara u jedinici vremena[54]), kod heterogenih reakcija označuje mjerni broj katalitički aktivnih centara. Slično kao kod heterogenih reakcija, može se i kod ove vrste katalizirane reakcije, kao što je proces raspadanja, konstanta C smatrati za mjerni broj čestica, koje su sposobne za rast. Mora se svakako još uzeti u obzir, da veličina C može sadržavati još jedan faktor manji od jedan, koji obuhvaća steričke smetnje. Za poznavanje prirode cjepiva važne su veličine C i A_w. Kod praktične provedbe procesa razlaganja važno je napomenuti, da se povišenje izraza A_w može kompenzirati povišenjem vrijednosti izraza C.

14. DA LI SE PRI RAZLAGANJU IZLUČUJE HIDRARGILIT ILI BAJERIT?

Fricke[55]) je već prije proučavao to pitanje i došao do rezultata, da se kod propisnog provođenja Bayerova postupka kao taložna supstanca uvijek izlučuje hidrargilit, i da bajerit dolazi u hidratu samo u novim tvornicama. Ova su opažanja potpuno potvrđena, jer se hidrargilit stvara čak i u onom slučaju, kad se cijepljenje vrši bajeritom. Po *Ostwaldovu* pravilu postepenosti moralo bi se kod razlaganja, osobito kod brza izlučivanja, uvijek računati s pojavom energetski bogatijega izomernog oblika, t. j. s bajeritom. *Stranski* i *Totomanov*[56]) pokazali su, da Ostwaldovo pravilo postepenosti ne obuhvaća neki naročiti prirodni zakon, nego da je jedino veličina brzine stvaranja klica mjerodavna za strukturu nove faze. Za brzinu stvaranja klica vrijedi jednadžba, koja je slična Arrheniusovoj

$$I = K \cdot e^{-\frac{A_K}{kT}} \qquad (21)$$

gdje je I brzina stvaranja klica, a A_K radnja potrebna za nastajanje klica. Jednadžba (21) može se primijeniti i za jedan mol tako, da se umjesto k stavi plinska konstanta R, pa tada izraz A_K označuje radnju pri stvaranju klica za jedan mol. Jednadžba (19) i (21) nisu samo formalno slične, ali ipak postoji razlika između A_K i A_w. A_K je reverzibilna radnja, a A_w je toplina aktivacije.

Kao što je već spomenuto u pogl. 8., hidratno cjepivo, dobiveno uvođenjem CO_2 u aluminatnu lužinu, nije pogodno za tehničku upotrebu. Iako se danas u fabrikaciji glinice po Bayerovu postupku takav hidrat u redovnom pogonu ne upotrebljava kao cjepivo, pitanje upotrebe takvog hidrata teoretski je zanimljivo, pa će se ovdje ukratko razmotriti.

Krivulja 2 dijagrama na sl. 7. daje tok izlučivanja hidrata u slučaju, ako se cijepi lužnatim cjepivom, koje je pripravljeno cijepljenjem čistim bajeritom. Brzina je izlučivanja dosta velika, ali je izlučeni hidrat suviše sitan. To je vjerojatno razlog, što takvo cjepivo ne odgovara, jer je u praksi potreban hidrat, koji se dobro filtrira.

Bajerit je energetski bogatiji od hidrargilita, što se vidi već iz njegove veće topljivosti (vidi pogl. 7.). Ako se označi topljivost bajerita sa L_B, a topljivost hidrargilita sa L_H, tada je termodinamički potencijal prijelaza bajerita u hidrargilit dan jednadžbom

$$G = RT \ln \frac{L_B}{L_H} + p \triangle V \qquad (22)$$

gdje je $p \triangle V$ rad izvršen zbog promjene volumena. Dalje, prema drugom zakonu termodinamike, vrijedi

$$G = U + p \triangle V - TS \qquad (23)$$

gdje je U promjena unutarnje energije, a S promjena entropije. Ako uvrstimo namjesto $U + p \triangle V = W_p$ toplinski efekt kod konstantnog pritiska, onda se za W_p dobiva

$$W_p = G - TS = G + T \frac{\delta G}{\delta T} \qquad (24)$$

gdje je $\frac{G}{T} = -S$ (25)

Iz topljivosti i temperaturnih koeficijenata topljivosti, s pretpostavkom, da vrijedi zakon za idealno razrijeđene otopine, mogu se izračunati G i W_p. Za pretvorbu bajerit-hidrargilit

(oboje fino dispergirani preparati) dobivaju se po jednadžbama (22) i (24) za G i W_p ove vrijednosti:

$$G = 2{,}3 \cdot 1{,}985.298 \log \frac{20{,}2}{17} + p \triangle V = 96{,}85 +$$

$$+ 5{,}54.10^{-3} \sim 96{,}86 \text{ cal}$$

$$G_{25^0} = 96{,}86 \quad \frac{\delta G}{\delta T} = -4{,}33 \text{ cal. stupanj}^{-1}$$

$$G_{28{,}5^0} = 81{,}71 \ T \quad \frac{\delta G}{\delta T} = -298 \cdot 4{,}33 = -1290$$

$$W_p = 96{,}86 - (-1290) = 1386 \text{ cal odnosno } 1{,}38 \text{ kcal}$$

Direktnim određivanjem topline otapljanja bajerita i hidrargilita u fluorovodičnoj kiselini *Fricke* i *Wullhorst*[18]) našli su, da W_p iznosi 1,2 kcal. To ujedno potvrđuje, da se razrijeđene aluminatne otopine kod navedenih koncentracija mogu termodinamički tretirati kao otopine aluminijskog oksihidrata u natrijskoj sužini. Nadalje, da se kod niskih koncentracija Al_2O_3 (topljivost hidrata kod 25° C) za proračunavanje termodinamičkih potencijala mogu upotrebiti koncentracije umjesto aktiviteta. Strogo uzevši, ako se radi s većim koncentracijama, moraju se pri izračunavanju uvrstiti aktiviteti umjesto koncentracije.

Jednadžbe (22, 23, 24, 25) vrijede ne samo za polimorfne pretvorbe, nego se s pomoću njih može proračunati razlika slobodne energije (F) kao i ukupne energije (U) fino dispergiranoga i krupnije kristaliziranog hidratnog cjepiva[57]). Jednadžba (22) tada glasi

$$F = RT \ln \frac{L'}{L} \qquad (22a)$$

gdje je L' topljivost aktivnoga hidratnog cjepiva, a L topljivost stabilnoga krupno disperznog hidrata. Tako se za slobodnu energiju kod 25° C dobiva

$$F = 2{,}3 \cdot 1{,}985.298 \log \frac{17}{13} = 158 \text{ cal}$$

a za promjenu ukupne energije U

$$U = 1{,}171 \text{ odnosno } 1{,}17 \text{ kcal.}$$

Ako se iz vrijednosti topljivosti, koje su dobivene kod viših temperatura, izračunaju slobodna energija (F) i ukupna energija (U), dobivaju se netočne vrijednosti, jer se zbog povećanja koncentracije ne može više primijeniti zakon idealno razrijeđene otopine, pa prema tome ni jednadžbe (22 i 22a). Kao što se vidi iz vrijednosti za U, povišenje ukupne energije je znatno, i to zbog velike površine fino dispergiranoga hidratnog cjepiva.

15. UTJECAJ STRANIH PRIMJESA, PRISUTNIH U TEHNIČKIM ALUMINATNIM LUŽINAMA, NA BRZINU IZLUČIVANJA I NA VELIČINU ZRNA

U tehničkim aluminatnim lužinama nakupe se s vremenom strane primjese, koje na proces razlaganja djeluju različito. Te se primjese nalaze ili otopljene molekularno disperzno ili su pak koloidno suspendirane. Kemijski utjecaj različitih primjesa dosad uglavnom nije objašnjen. Koloidno disperzne primjese, a to su u prvom redu čestice crvenog mulja, kremična kiselina i organske supstancije, zbog svojih graničnih površina (vidi izlaganje u pogl. 12 b.) djeluju na stvaranje klica. U dijagramu sl. 4. jasno se vidi, da čiste aluminatne otopine trebaju kao poticaj za reakciju raspadanja veće količine hidratnog cjepiva nego tehničke otopine. Kod tehničkih otopina, kod stvaranja klica, djeluju dakle još i nespecifični izazivači kristalizacije. Kasnije se slika doduše sasvim mijenja, jer primjese jako poremećuju kristalizaciju, a iz čistih se aluminatnih otopina dobiva mnogo grublje zrno hidrata. Sasvim je sigurno, da rastu kristala primarno prethodi adsorpcija sastojina, koje grade kristal. Adsorpcija čini predstepenicu za konačno ugrađivanje u kristalinčnu mrežicu. U građivanje stranih sastojina izaziva poremećaje, jer se remeti idealno pravilna građa prostorne mrežice. Iz dijagrama sl. 5. i 6. jasno se vidi vrlo jak utjecaj koloidalno dispergiranih primjesa. Stoga je potrebno, da se aluminatne otopine prije razlaganja očiste filtracijom po mogućnosti s dodatkom aktivnog ugljena ili aktivne glinice[53]). Prema podacima *Beljajeva*[59]) na proces razlaganja naročito negativno djeluje kremična kiselina, pa on kao krajnju granicu omjera $Al_2O_3 : SiO_2$ preporučuje 250—300 : 1. Međutim, i organske supstancije jako usporavaju izlučivanje, kao što se to navodi u jednom američkom patentu[60]. Prema tom patentu aluminatne se otopine mogu stabilizirati, t. j. sačuvati od raspadanja, dodatkom šećera, dekstrina ili škroba. »Prave« primjese također utječu na kristalizaciju, ali je još malo poznato djelovanje

pojedinih komponenata. Prema tome, za praksu je važno, da aluminatne otopine budu što čišći, i radi toga je potrebno da se povremeno pročišćuju.

16. ZAKLJUČNO RAZMATRANJE

U ovoj se radnji nastojalo, da se prema postignutim rezultatima, objasni reakcioni mehanizam djelovanja cjepiva (čestica aluminijskog hidrata), koje ima različit stepen disperziteta, na proces razlaganja aluminatnih otopina. Pritom smo se služili teorijama o stvaranju klica i rastu kristala, koje su se razvile posljednjih dvadeset godina. Naročito dragocjene zaključke dali su kinetički pokusi procesa raspadanja natrijskog aluminata. Kako priroda aluminatnih otopina nije još jednoznačno riješena, tako da bi se sve pojave kod procesa razlaganja mogle objasniti (vidi o tome pregled *Beljajeva*[59]), to smo neke od tih pojava mogli obraditi samo formalno termodinamički. Može se smatrati, da je otapanje aluminata prava kristalizaciona pojava, i da protiv koloidalne naravi otopine ima toliko prigovora, da se ova hipoteza mora konačno napustiti.

Naročito je važan rezultat, da hidrolitičke pojave pri razlaganju aluminatnog kompleksa imaju samo podređeno značenje. Uloga hidrolize pri procesu razlaganja, u literaturi se naročito naglašava, iako dosad ni jedan od autora nije taj problem obradio računski. Proračunate konstante hidrolize i stupnjevi hidrolize ne stoje ni u kakvu razmjeru s efektivno postignutim iskorišćenjem $Al(OH)_3$ pri samom razlaganju. Proces razlaganja aluminatne lužine nije se dosad uvrštavao u katalitičke procese (63). Ako se pojam katalize ne shvati suviše usko, a osim toga, ako se uzme u obzir što znači proces rasta kristala za »aktivne centre«, kao i jaka ovisnost brzine procesa razlaganja o nastanku cjepiva, onda se proces razlaganja aluminatne lužine može smatrati za autokatalitički proces. Primjenom iskustava o pripremanju katalizatora dolazi se također do »aktivnih« hidratnih cjepiva, kojih upotreba skraćuje vrijeme razlaganja. S druge strane, na takav se način s pomoću klica reakcija ne usmjeruje prema određenoj modifikaciji hidrata[64]). Uvijek se stvara ona modifikacija hidrata, za koju u otopini postoje uvjeti stvaranja, bez obzira na to, cijepi li se hidrargilitom ili bajeritom. Dakle, nastaje ona modifikacija, koja kod danih uvjeta ima najmanju brzinu stvaranja klica (jednadžba 21.).

Još uvijek ostaje neobjašnjeno pitanje, zašto raspadanje aluminatnih otopina teče tako sporo, dok se to kod drugih

zasićenih otopina ne događa. Ako se postavi kao cilj dalje skraćenje procesa razlaganja, onda je taj problem od naročitoga teoretskog i praktičkog značenja. Definitivna se objašnjenja mogu očekivati tek onda, kad se temeljito upozna priroda aluminatnih otopina.

17. ZAKLJUČAK

a) Ispitana je kinetika razlaganja aluminijskog hidrata upotrebom različitih aluminatnih cjepiva i utvrđen je utjecaj veličine kristala cjepiva na brzinu izlučivanja.

b) Dobiveni rezultati izvršenih pokusa tumačeni su prema novijim teorijama o stvaranju klica, kod čega se može zaključiti, da je samo aluminijski hidrat podesan da izazove kristalizaciju. U tu su svrhu iskorišteni i rezultati rentgenskih snimanja, kao i rezultati dobiveni određivanjem gustoće.

c) Određivanjem topljivosti hidrargilita u 4n-NaOH kod različitih temperatura utvrđeni su stabilitetni odnosi aluminatne lužine, koja se razlaže po Bayerovu postupku.

d) Kristalinično cjepivo djeluje na smanjivanje radnje kod stvaranja klica, kao i na odvajanje čestica hidratnog sola, koje u otopini samostalno rastu u veće kristale. Na taj se način može objasniti, zašto aluminijski hidrat suviše velikog disperziteta nije podesan za cijepljenje.

e) Naši rezultati uspoređeni su s rezultatima drugih autora, i njihovo je gledište podvrgnuto kritici.

f) Hidrolitičke pojave imaju kod procesa razlaganja sasvim sporedno značenje.

LITERATURA

[1]) Bayer, K. J., D. P. 656 604 (1892); A. P. 515 895 (1892). — [2]) Straumanis, M., Handbuch der Katalyse, IV. Bd., Wien, Springer, 1943. — Kossel, W., Nachr. Ges. Wiss., Göttingen, mathem.-physikal. Kl., 1927., 135—143. — Stranski, I. N., Jb. Univ. Sofia, physik.-mathem. Abt., **24** (1927—28), 2, 297. — [3]) Hiller, H., Laboratoriumsbuch für die Tonerdeindustrie, Halle (1922). — [4]) Fresenius-Jander, Handbuch der analyt. Chemie, 3. Teil, Bd. III., Berlin 1942. — [5]) Davis, H. L. i Farnham, E. C., J. phys. chem., **36** (1932) 1057. — [6]) Biltz, H. i Biltz, W., Ausführung quantitativer Analysen, Leipzig, Hirzel, 1937., str. 60. — [7]) Fricke, R. i Meyring, K., Z. anorg. u. allg. Chem., **188** (1930) 127. — [8]) Hedwall, J. A., Reaktionsfähigkeit fester Stoffe, Leipzig, 1938. — Hedwall, J. A., Handbuch der Katalyse, Bd. VI., Wien, 1943. — Hüttig, G. F., Handbuch der Katalyse, Bd. VI., Wien, 1943. — Fricke, R., Handbuch der Katalyse, Bd. IV., Wien, 1943. — [9]) Wislizenius, H., Z. angew. Chem. **17** (1904) 805, Z. anal. Chem. **44** (1905) 104. — [10]) Fricke, R. i Wullhorst, B., Z. anorg. u. allg. Chem., **205** (1932) 131. — [11]) Achenbach, H., Chemie der Erde, **6** (1931) 307. — [12]) de Schulten, A., Bull. Soc. franç. Minéral., **19** (1896) 157. — [13]) Fricke, R. i Meyring, K., loc. cit. — [14]) Horms, H., Die Dichte flüssiger und fester Stoffe, Braunschweig, Vieweg, 1941. — [15]) Volmer, M., Kinetik der Phasenbildung, Dresden-Leipzig, Th. Steikopf, 1939. — [16]) Fricke, R., Z. anorg. u. allg. Chem., **175** (1928) 249. — [17]) Fricke, R. i Jucaitis, P., Z. anorg. u. allg. Chem., **191** (1930) 129. — [18]) Fricke, R. i Wullhorst, B., Z. anorg. u. allg. Chem., **205** (1932) 131. — [19]) Fricke, R. i Severin, H., Z. anorg. u. allg. Chem., **205** (1932) 287. — [20]) Fricke, R., Kolloid. Z., **49** (1929) 229. — Z. phys. Chem., **113** (1924) 248. — [21]) Dhar, N. R. i Ghosch, S., Z. anorg. u. allg. Chem., **152** (1926) 405. — Dhar, N. R. i Ghosch, S., Chem. News, **133** (1926) 177. — Mohanlal, R. i Dhar, N. R., Z. anorg. u. allg. Chem., **174** (1928) 1. — [22]) Fricke, R., Z. Elektrochem., **26** (1920) 129. — [23]) Hildebrand, I. H., J. Am. Chem. Soc., **35** (1913) 863. — Blum, W., J. Am. Chem. Soc., **35** (1913) 1500; **38** (1916) 1284. — Treadwell, W. D i Boner, J. E., Helv. Chim. Acta, **17** (1934) 774. — Treadwell, W. D. i Zürcher, M., Helv. Chim. Acta, **16** (1932) 980. — Nicolsky, B. P. i Paramonova, V. I., Žurnal prikladnoj Chim., B **2** (1931) 687; Z. phys. Chem. (A) **159** (1932) 47. — Jander, G. i Jahr, K. F., Kolloid-Beihefte, **43** (1935/36) 295. — [24]) Roth, W. A., Wirth, G. i Berendt, H., Z. Elektrochem., **48** (1942) 264. — [25]) Fricke, R. i Jucaitis, P., Z. anorg. u. allg. Chem., **191** (1930) 129. — [26]) Slade, R. E. i Polack, W. G., Z. Elektrochem., **21** (1914) 31. — [27]) Fricke, R. i Fricke-Hüttig, Hydroxyde und Oxydhydrate, Leipzig, 1937., System Al_2O_3/H_2O, str. 105. — [28]) Fricke, R. i Fricke-Hüttig, Hydroxyde und Oxydhydrate, Leipzig, 1937., str. 67. — Fricke, R. i Meyring, K., Z. anorg. u. allg. Chem., **214** (1933) 269. — [29]) Werner, A., Neuere Anschauungen der anorganischen Chemie, (1923). — [30]) Heyrovský, J., J. chem. Soc., **117** (1920) 1023; Bull. international de l'Académie des Sciences de Bohème, 1921/22.; Chem. N., **125** (1922) 198. — Collection of Czechoslovak Chemical Communications, 1929. — [31]) Herasymenko, P., Rec. Trav. chim., **44** (1925). — [32]) Meerwein, H., Lieb. Ann., **455** (1927) 234. — [33]) Remy, H., Lehrbuch der anorg. Chemie, Leipzig, 1938. — [34]) Bauermeister, G., Aluminium, **23** (1941) 205. — [35]) Bauermeister, G. i Fulda, W., Aluminium, **25** (1943) 97. — [36]) Wood, I. K., J. chem. Soc., London, **93** (1908) 411. — [37]) Blum, W., J. Amer. chem. Soc., **35** (1913) 1499. — [38]) Maffei, A., Gazz. chim. Ital., **64** (1934) 149. — [39]) Remy, H., Lehrbuch der anorgan. Chemie, Leipzig, 1939., I. Bd. — [40]) Ostwald, Wo., Kolloid. Z., **43** (1927) 249. — [41]) Ostwald, Wo. i v. Buzágh A., Kolloid. Z., **41** (1927) 165; **43** (1927) 215; **50** (1930) 65. — [42]) Fricke, R. i Jucaitis, P., Z. anorg. u. allg. Chem., **191** (1930) 129. — [43]) Buzágh, A., Kolloidik, Dresden, Th. Steinkopl, 1936. — [44]) Heyrovský, J., Collection of Czechoslovak Chemical Communications, I, (2) 1929. — [45]) Wulf, G., Z. Kristallogr., Mineral., Petr., 34 (1901) 449. — [46]) Thomson, W., Philos. Mag. J. Sci., (4) **42** (1871) 448. — [47]) Weygand, C., Chemische Morphologie der Flüssigkeiten und Kristalle, Leipzig, 1941. — Z. anorg. u. allg. Chem., **224** (1935) 265. — [48]) Kossel, W., Naturwiss., **18** (1930) 901. — [49]) Stranski, I. N., Z. phys. Chem., **136** (1928) 259; Z. phys. Chem., (Abt. B) **17** (1932) 127. — [50]) Haber, F., Naturwiss., **13** (1925) 1007. — [51]) Straumanis, M., Handbuch der Katalyse, IV. Bd., Wien, Springer, 1943., str. 269. — [52]) Taylor, H. S., Z. Elektrochem., **35** (1929) 542. — Schwab, G. M. i Pietsch, E., Z. Elektrochem., 35 (1929) 135. — Z. phys. Chem., Abt. B **1** (1929) 385; **2** (1929) 262. — [53]) Stranski, I. N., Z. Elektrochem., 36 (1930) 25. — [54]) Eucken, A., Lehrbuch der chemischen Physik, II. Bd (2) Leipzig, 1944., str. 1131. — [55]) Fricke, R., Z. anorg. u. allg. Chem.,

175 (1928) 249; **179** (1929) 287. — [56]) Stranski, I. N. i Totomanov, D., Z. phys. Chem., (A) **163** (1933) 399. — [57]) Hüttig, G. F., Handbuch der Katalyse, VI. Bd., Wien, Springer, 1943. str. 347. — [58]) Muhačev, Legkije metaly, 11 (1936) 14. — [59]) Beljajev, A. J., Metalurgija legkih metalov, Moskva, 1945., str. 86. — [60]) Spence, H. i Craigh, Th. J., I., A. P., 1157436 (1914). — [61]) Iskoljdsky, I. I., Himija rastvorov aljuminievoj promišljenosti, ONTI, 1947. — Kurbatov, V. J. i Funk, E. P., O prirode aljuminatnih rastvorov, Otčet 1933, Lb. f.—h., LHTI. — [62]) Strokov, F. I. i dr. Trudij GIPH, vyp. 32, 1940, 95—114. — [63]) Kohlschütter, H. W., Handbuch der Katalyse, IV. Bd., Wien, 1943, str. 391. — [64]) Nitschmann, H., Reaktionslenkung durch Keime, Helv. chim. Acta, **21** (1938) 1609.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 2. XI. 1949.)

Dr. V. S. VRKLJAN

DE BROGLIEJEVA TEORIJA ČESTICA SA SPINOM 1 I EHRENFESTOV TEOREM

Poznato je, da u *Schrödingerovoj* klasičnoj valnoj mehanici vrijedi t. zv. *Ehrenfestov* teorem, po kojem za gibanje težišta oblaka vjerojatnosti vrijede zakoni *Newtonove* klasične mehanike, a napose prvi i drugi aksiom[1]. Kasnije se opet pokazalo u *Diracovoj* teoriji elektrona i pozitrona, da u njoj ne vrijedi *Ehrenfestov* teorem, već da i za gibanje težišta oblaka vjerojatnosti elektrona i pozitrona izvan elektromagnetskoga polja ne vrijedi zakon ustrajnosti, kako bismo to očekivali po *Ehrenfestovu* teoremu[2]. Zadaća je ove rasprave da se pokaže, da *Ehrenfestov* teorem ne vrijedi ni za čestice sa spinom 1 (foton, mezon), a pokazat će se to na osnovi novije *de Brogliejeve* teorije koju je on postavio za takve čestice[3].

Poznato je nadalje, da je *de Broglie* do svoje teorije čestica sa spinom 1 došao na osnovi svoje hipoteze o fuziji čestica, t. j. dvije čestice sa spinom $\frac{1}{2}$ imaju dati fuzijom česticu sa spinom 1; one bi doduše mogle dati i česticu sa spinom 0, ali taj nas slučaj bar zasad ne interesira, jer *Schrödingeroa* valna mehanika, u kojoj vrijedi *Ehrenfestov* teorem, zapravo tretira česticu bez spina. Svoju teoriju fuzije čestica, koja je karakterizovana fuzijom matrica, obradio je *de Broglie* na dva formalno različita načina: predašnja teorija karakterizovana je s dvije parcijalne *Lagrangeove* funkcije i (u računu općeg formalizma)

[1] P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. 45, 455—457, 1927. — Vidi i A. E Ruark, Phys. Rev. 31, 536—538, 1928, i L. de Broglie, Einf. in die Wellenmechanik, 1929, 98—101.

[2] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 294.

[3] L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du Photon et Théorie quantique des champs, 1949, 27—54.

barem donekle s dvije parcijalne *Hamiltonove* funkcije[4], dok je njegova novija teorija karakterizovana (u opreci prema predašnjoj teoriji) s jednom *Lagrangeovom* i jednom *Hamiltonovom* funkcijom problema[5].

Kako se ovdje primjenjuje novija *de Brogliejeva* teorija (dakle teorija s jednom *Lagrangeovom* i jednom *Hamiltonovom* funkcijom problema), potrebno je za tu svrhu zgodno definirati i srednju vrijednost O operatora O kao i matricu O_{mn} operatora O. Kao prvu definirat ćemo

$$\bar{O} = \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} \overset{*}{\Psi}_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} O \Psi_{kl} \, d\tau, \tag{1}$$

gdje su Ψ_{kl} *de Brogliejeve* (složene) valne funkcije, dok su a_r i b_r šesnaestredne kvadratske hermitske matrice, dobivene iz *Diracovih* postupkom fuzije matrica, t. j. definicijama (uz $k, l, p, q = 1, 2, 3, 4$)

$$(a_r)_{kl,pq} = (\alpha_r)_{kp} \delta_{lq}, \quad (b_r)_{kl,pq} = (\alpha_r)_{lq} \delta_{kp} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

dok su a_4 i b_4 (po *de Broglieju)* šesnaestredne kvadratske hermitske matrice s elementima različitim od nule samo u glavnoj dijagonali matrice; ovdje su α_r Diracove matrice, a $\delta_{kl} = 1$ (za $k = l$), odnosno 0 (za $k \neq l$) poznati *Kroneckerov* simbol. Jednadžba (1) odmah nas vodi na koordinate srednje pozicije čestice (t. zv. centra težine vjerojatnosti), ako samo stavimo $O = x, y, z$ (x, y, z shvaćeni kao operatori); dobivamo kao koordinate srednje pozicije čestice isto, što i primjenom jednadžbi

$$\bar{x} = \iiint x \varrho \, d\tau, \quad \bar{y} = \iiint y \varrho \, d\tau, \quad \bar{z} = \iiint z \varrho \, d\tau, \tag{2}$$

ako samo primijenimo *de Brogliejev* izraz za gustoću ϱ vjerojatnosti nalaza čestice (ϱ nazivamo još i statističkom gustoćom čestice). Prema tome je $\varrho d\tau$ vjerojatnost nalaza čestice u volumenu $d\tau$ s koordinatama x, y, z.

[4] L. de Broglie, Une nouvelle Théorie de la Lumière I, 1940, 164; L. de Broglie, Théorie générale des particules à spin, 1943, 120—126.

[5] L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du Photon, 1949, 28.

Na taj način nas kako jednadžba (1) tako i jednadžba (2) vode do izraza

$$\bar{x} = \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} \overset{*}{\Psi}_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} x \Psi_{kl} \, d\tau, \tag{3}$$

a posve su analogni i izrazi za $\bar{y}$ i $\bar{z}$. $\overset{*}{\Psi}_{kl}$ znači konjugirano-kompleksnu vrijednost od Ψ_{kl}.

Uvrstimo li sada u skladu s *de Brogliejem*

$$\Psi_{kl} = \sum_n c_n (\Psi_n)_{kl}, \tag{4}$$

prelazi nam jednadžba (2) u

$$\bar{x} = \sum_m \sum_n \overset{*}{c}_m c_n \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} x (\Psi_n)_{kl} \, d\tau, \tag{5}$$

odnosno, ako definiramo

$$\iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} x (\Psi_n)_{kl} \, d\tau = x_{mn}, \tag{6}$$

u

$$\bar{x} = \sum_m \sum_n \overset{*}{c}_m c_n x_{mn}. \tag{7}$$

Definicija (6) odgovara definiciji operator-matrice

$$O_{mn} = \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} O (\Psi_n)_{kl} \, d\tau, \tag{8}$$

ako samo u njoj stavimo $O = x$. Iz ove jednadžbe lako izvedemo (uz pretpostavku $\frac{\partial O}{\partial t} = 0$)[6]

[6] Zašto na desnoj strani jednadžbe (9) pod znakom integrala pišemo parcijalne derivacije, objašnjeno je u udžbeniku C. Schaefera (Theor. Phys.), u knjizi III-2, 1937, na str. 457—476.

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left[\frac{\partial (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}}{\partial t} \frac{a_4 + b_4}{2} O(\Psi_n)_{kl} + \right.$$

$$\left. + (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} O \frac{\partial (\Psi_n)_{kl}}{dt} \right] d\tau \qquad (9)$$

i dalje, pretpostavivši zamjenljivost operatora O s matricom $a_4 + b_4$ * te primijenivši *de Brogliejevu* jednadžbu[7]

$$\frac{a_4 + b_4}{2} \frac{\partial (\Psi_n)_{kl}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H(\Psi_n)_{kl}, \qquad (10)$$

gdje je H *Hamiltonov* operator po *de Brogliejevoj* novijoj teoriji čestica sa spinom 1,

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left[\overset{*}{H} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} O(\Psi_n)_{kl} - \right.$$

$$\left. - (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} O H (\Psi_n)_{kl} \right] d\tau \qquad (11)$$

Supstitucija, koja se u jednadžbi (9) izvršuje prema jednadžbi (10), odnosi se na sve elemente matrice $\frac{a_4 + b_4}{2}$, koji se nalaze u glavnoj dijagonali, bez obzira na iznos tog elementa, t. j. bez obzira na to, da li je njegov iznos ± 1 ili 0.

Međutim može se lako pokazati, da vrijedi relacija

$$\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \overset{*}{H} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} O(\Psi_n)_{kl} d\tau =$$

$$= \iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} H O(\Psi_n)_{kl} d\tau \qquad (12)$$

---

* Lako se možemo uvjeriti, da operator impulsmomenta kao i de Brogliejevi operatori spina zadovoljavaju tu pretpostavku.

[7] Desna strana jednadžbe (10) uzeta je ovdje s protivnim predznakom negoli kod de Broglie a; posljedica je toga među ostalim i to, što i na desnoj strani jednadžbe (18) dolazi protivni predznak negoli kod de Broglie a.

Uzmemo li naime u obzir, da je

$$\overset{*}{H} = -c \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\overset{\rightarrow}{\overset{*}{a}} b_4 + \overset{\rightarrow}{\overset{*}{b}} a_4}{2} \operatorname{grad} - \frac{i}{\hbar} a_4 b_4 \mu_0 c \right).$$

gdje su (u skladu s de Brogliejem) a_4 i b_4 uzete kao matrice s realnim elementima, onda je [zbog $(\overset{*}{a}_r)_{kl,pq} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} = \sum_{j=1}\sum_{q=1} (\overset{*}{a}_r)_{kl,pq} (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}$] za onaj dio Hamiltonove funkcije, odnosno operatora, u kojem dolaze derivacije $\frac{\partial}{\partial x_r}$ $(r = 1, 2, 3)$,

$$-c \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} \frac{\overset{*}{a}_r b_4 + \overset{*}{b}_r a_4}{2} \frac{\partial (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}}{\partial x_r} O(\Psi_n)_{kl} =$$

$$= -c \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} \left[\sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{4} \left(\frac{\overset{*}{a}_r b_4 + \overset{*}{b}_r a_4}{2} \right)_{kl,pq} \frac{\partial (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \right] O(\Psi_n)_{kl},$$

a to je zbog hermitičnosti *de Brogliejevih* matrica $[(\overset{*}{a}_r)_{kl,pq} = (a_r)_{pq,kl}]$ dalje jednako

$$-c \frac{\hbar}{i} \sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} \frac{\partial (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \right)_{pq,kl} O(\Psi_n)_{kl}$$

Parcijalna integracija ovog izraza vodi na

$$-c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} \frac{\partial (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \right)_{pq,kl} O(\Psi_n)_{kl} d\tau =$$

$$= -c \frac{\hbar}{i} \left| \sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \right)_{pq,kl} O(\Psi_n)_{kl} \right| +$$

$$+ c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{p=1}^{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{r=1}^{3} (\overset{*}{\Psi}_m)_{pq} \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4} \left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \right)_{pq,kl} \frac{\partial}{\partial x_r} O(\Psi_n)_{kl} d\tau.$$

Uz pretpostavku, da valne funkcije $(\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}$ i $(\Psi_n)_{kl}$ na granicama prostora integracije iščezavaju, otpada prvi član i ostaje samo drugi član (integral), pa tako dobivamo

$$-c\frac{\hbar}{i}\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\sum_{r=1}^{3}\frac{\partial(\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r}\sum_{i=1}^{4}\sum_{\varsigma=1}^{4}\left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2}\right)_{pq,\,kl} O(\Psi_n)_{kl}\,d\tau =$$

$$= c\frac{\hbar}{i}\iiint \sum_{p=1}^{4}\sum_{\varsigma=1}^{4}(\overset{*}{\Psi}_m)_{pq}\sum_{r=1}^{3}\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2}\frac{\partial}{\partial x_r}O(\Psi_n)_{pq}\,d\tau.$$

Time je dokaz izveden samo za onaj dio *Hamiltonove* funkcije (operatora), u kojem dolazi gradijent; za onaj pak dio, u kojem dolazi $a_4 b_4 \mu_0 c$, dokaz je tako lagan, da se može ovdje izostaviti [jer za matrice a_4 i b_4 uzimamo u skladu s *de Broglijem*, da se sastoje od samih (realnih) jedinica u glavnoj dijagonali matrice (dok su svi ostali elementi = 0), pak prema tome vrijedi to i za produkt $a_4 b_4$]. Na taj način možemo konačno uzeti, da je jednadžba (12) dokazana i njenom primjenom prelazi (11) konačno u

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}(\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}(HO - OH)(\Psi_n)_{kl}\,d\tau. \qquad (13)$$

Iz jednadžbe (7) izlazi međutim

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \sum_m\sum_n \overset{*}{c}_m c_n \frac{dx_{mn}}{dt}, \qquad (14)$$

a na desnoj strani ove jednadžbe možemo primijeniti jednadžbu (13), ako tamo stavimo $O = x$, $O_{mn} = x_{mn}$.

U analogiji s onim, što je izvedeno u *Diracovoj* teoriji elektrona[8], možemo zaključiti ovdje, da je

$$Hx - xH = c\frac{\hbar}{i}\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} \qquad (15)$$

[8] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 292.

i prema tome

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = c\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}(\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}(\Psi_n)_{kl}\,d\tau, \qquad (16)$$

a to primjenjeno u jednadžbi (14) daje

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = c\sum_m\sum_n \overset{*}{c}_m c_n \iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}(\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}(\Psi_n)_{kl}\,d\tau, \qquad (17a)$$

odnosno

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = c\iiint \sum_{l=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\left[\sum_m \overset{*}{c}_m(\overset{*}{\Psi}_m)_{kl}\right]\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}\left[\sum_n c_n(\Psi_n)_{kl}\right]d\tau. \qquad (17b)$$

Uzevši u obzir relaciju (4) možemo jednadžbu (17b) još pisati

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = c\iiint \sum_{l=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_{kl}\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}\Psi_{kl}\,d\tau \qquad (17c)$$

i analogno k tome

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = c\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_{kl}\frac{a_2 b_4 + b_2 a_4}{2}\Psi_{kl}\,d\tau,$$

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = c\iiint \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_{kl}\frac{a_3 b_4 + b_3 a_4}{2}\Psi_{kl}\,d\tau. \qquad (17d)$$

Kako je po *de Brogliju* gustoća struje vjerojatnosti za čestice sa spinom 1 dana izrazom

$$\varrho u_x = c\sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_{kl}\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}\Psi_{kl}, \qquad (18)$$

to je konačna jednadžba za pojedine komponente brzine srednje pozicije čestice (t. j., t. zv. brzina centra težine vjerojatnosti)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \iiint \varrho\, u_x\, d\tau = \bar{u}_x\,, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{u}_y\,, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{u}_z\,. \tag{19}$$

Dakle i za čestice sa spinom 1 dobili smo rezultat, poznat već iz *Diracove* teorije elektrona (dakle čestice sa spinom $\frac{1}{2}$), da je naime brzina srednje pozicije čestice jednaka srednjoj brzini struje vjerojatnosti.

U nekoj analogiji s onim, što je već poznato u *Diracovoj* teoriji elektrona[9], možemo u jednadžbama (17c, d) interpretirati operatore $c\,\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$, $c\,\frac{a_2 b_4 + b_2 a_4}{2}$ i $c\,\frac{a_3 b_4 + a_3 b_4}{2}$ kao operatore, koji u neku ruku korespondiraju trim komponentama brzine čestice sa spinom 1.

Ako sada jednadžbu (14) ponovo diferenciramo po vremenu, dobivamo

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \frac{d^2 x_{mn}}{dt^2}\,. \tag{20}$$

Ponovna primjena jednadžbe (13), gdje sada u smislu onoga, što je upravo rečeno i u analogiji s onim, što je poznato iz teorije elektrona, stavimo $O_{mn} = x_{mn}$, $O = c \cdot \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$ i tako dobiveni rezultat

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = c\,\frac{i}{\hbar} \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \left(H\,\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}\, H \right) (\Psi_n)_{kl}\, d\tau \tag{21}$$

[9] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 293.

primijenimo na desnoj strani jednadžbe (20), dovodi nas to do konačne jednadžbe

$$\frac{d^2\bar{x}}{dt^2} = c\,\frac{i}{\hbar} \sum_m \sum_n c_m^* c_n \iiint \sum_{k=1}^{4} \sum_{l=1}^{4} (\overset{*}{\Psi}_m)_{kl} \left(H\,\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}\, H \right) (\Psi_n)_{kl}\, d\tau\,. \tag{22}$$

Ali *Hamiltonov* operator ne komutira s $\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$ (jer u njem dolaze $a_{2,3}$ i $b_{2,3}$) i stoga izraz na desnoj strani ne iščezava čak ni onda, ako se nabita čestica sa spinom 1 (mezon) giblje bez utjecaja izvanjskoga elektromagnetskoga polja, put te čestice nije ni tada jednoliko i pravocrtno gibanje, kako bismo to inače (t. j. da nema spina) očekivali po *Ehrenfestovu* teoremu.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. XI. 1949.)

Dr. V. S. VRKLJAN

O MAGNETSKOM MOMENTU MEZONA SA SPINOM 1

Poznato je, da su za objašnjenje nekih svojstava mezona (spin, magnetski moment) postavljene izvjesne teorije u okviru valne mehanike. Tako na pr. *L. de Broglie*[1] nastoji poznatom metodom fuzije matrica[2] dobiti iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona (dakle čestica sa spinom 1/2) svoju teoriju za čestice sa spinom 1 (foton, neki mezoni[3]), pa čak i za čestice s povoljnim spinom[4]. Problem magnetskoga momenta mezona sa spinom 1 u okviru spomenute *de Brogliejeve* teorije, a primjenom *Darwinove* metode valnog paketa[5] nastojao je nedavno riješiti pisac ovih redaka[6] pripisujući kod toga *Diracove* valne funkcije pojedinim česticama, koje fuzijom tvore mezon i upotrebivši kod toga kvadratske hermitske matrice 16 reda sa 16 elemenata, različitih od nule. Zadatak je ovoga rada da se odredi magnetski momenat mezona primjenom općenitijih matrica (kod dosadanjeg računa spomenutih 16 od nule različitih elemenata u svakoj matrici bili su — realne ili imaginarne — jedinice) i pripisujući kod toga čitavomu mezonu kao cjelini valne funkcije po uzoru *de Brogliea*[7] umjesto da se pripiše,

---

[1] L. de Broglie, Particules à spin, 1943 i La théorie du noyau, **II**, 1945, str. 66—70.

[2] Born-Jordan, Element. Quantenmechanik, 1930, str. 75.

[3] L. de Broglie, Particules à spin, 1943, str. 93—137. Budući da bi prema najnovijim izvještajima imao izvjesnim mezonima (t. zv. μ-mezonima) pripadati spin 1/2 (isp.: R. E. Marshak, Phys. Rev. 1949, **75**, str. 700—701 i J. A. Wheeler and J. Thiomno, Phys. Rev. 1949, **75**, str. 1306), jasno je, da se gornji izvodi odnose samo na one mezone, kojima bi se mogao pripisati spin 1.

[4] L. de Broglie, Particules à spin, 1943, str. 138—157.

[5] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, str. 167—173.

[6] U Proceedings of the Indian Academy of Sciences, **XXX**, 1949, str. 205—210.

[7] L. de Broglie, Particules à spin, 1943, str. 112.

kako je to naprijed spomenuto, *Diracove* valne funkcije pojedinim česticama, koje bi po *de Broglieju* imale fuzijom tvoriti mezon.

Da se ne mora pisati eksplicite osam matrica 16 reda, što bi zapremilo velik prostor, napisat ćemo ponajprije *Diracove* matrice u obliku

$$\alpha_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overset{*}{g} \\ \overset{*}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -ig \\ 0 & 0 & -i\overset{*}{g} & 0 \\ 0 & ig & 0 & 0 \\ i\overset{*}{g} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -\overset{*}{g} & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ \overset{*}{g} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

i iz njih poznatom metodom *L. de Brogliea*, t. j. definicijama

$$(a_r)_{kl,\,mn} = (\alpha_r)_{km}\,\delta_{ln}\,,\quad (b_r)_{kl,\,mn} = (\alpha_r)_{ln}\,\delta_{km}\quad (r,k,l,m,n = 1,2,3,4) \tag{2}$$

gdje nam δ_{km} označuje poznati *Kroneckerov* simbol

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1\ (k = m) \\ 0\ (k \neq m)\,, \end{cases}$$

odrediti ukupno osam matrica 16 reda, koje onda određuju oblik diferencijalnih jednadžbi mezona. Kako je u tim matricama g povoljan kompleksni broj i vezan samo na uvjet

$$g \cdot \overset{*}{g} = 1\,, \tag{3}$$

gdje $\overset{*}{g}$ znači konjugirano-kompleksnu vrijednost od g, to nam matrice (1), odnosno matrice (2) zamjenjuju zapravo beskonačno mnogo posebnih matrica. Kao primjer takve veličine g, koja zadovoljava relaciju (3), može se navesti $g = \dfrac{p_0 - i\,q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}$, gdje su p_0 i q_0 realni brojevi po volji, dok je i imaginarna jedinica.

Onda *de Brogliejeve* jednadžbe za mezon izvan elektromagnetskoga polja glase

$$\left\{\frac{\hbar}{i}\left(a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}\right) + a_4\,\mu_0 c + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Psi_{kl} = 0$$

$$(k,l = 1,2,3,4) \tag{3a}$$

i

$$\left\{\frac{\hbar}{i}\left(b_1\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} + b_3\frac{\partial}{\partial z}\right) + b_4\,\mu_0 c + \frac{\hbar}{ic}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Psi_{kl} = 0$$

$$(k,l = 1,2,3,4) \tag{3b}$$

Ovdje znači $\hbar$ *Planckovu* konstantu, dividiranu s 2π, c brzinu svjetlosti u vakuumu, dok je μ_0 masa mezona u stanju mirovanja (odn. praktički kod malenih brzina). Ψ_{kl} su *de Brogliejeve* valne funkcije mezona. Nadalje *de Brogliejev* izraz za gustoću struje vjerojatnosti (odnosno statističku gustoću struje čestice po *Sommerfeldu)*

$$\vec{j} = \sum_{k=1}^{4}\sum_{l=1}^{4}\overset{*}{\Psi}_{kl}\,\frac{\vec{a}\,b_4 + \vec{b}\,a_4}{2}\,\Psi_{kl}\,, \tag{4}$$

gdje nam $\overset{*}{\Psi}_{kl}$ označuje konjugirano-kompleksnu vrijednost od Ψ_{kl}, vodi s obzirom na matrice (1) i (2) na pr. na ovaj izraz za x-komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona (naboj mezona $\varepsilon = \pm e$)

$$j_x = \frac{\varepsilon c}{2}\Big\{g\,[(\overset{*}{\Psi}_{31} + \overset{*}{\Psi}_{13})\,\Psi_{33} + \overset{*}{\Psi}_{41}\,\Psi_{43} + \overset{*}{\Psi}_{14}\,\Psi_{34} + \overset{*}{\Psi}_{43}\,\Psi_{23} + \overset{*}{\Psi}_{34}\,\Psi_{32} +$$
$$+ \overset{*}{\Psi}_{44}\,(\Psi_{42} + \Psi_{24})] + \overset{*}{g}\,[\overset{*}{\Psi}_{32}\,\Psi_{34} + (\overset{*}{\Psi}_{42} + \overset{*}{\Psi}_{24})\,\Psi_{44} + \overset{*}{\Psi}_{23}\,\Psi_{43} + \tag{5}$$
$$+ \overset{*}{\Psi}_{33}\,(\Psi_{13} + \Psi_{31}) + \overset{*}{\Psi}_{43}\,\Psi_{41} + \overset{*}{\Psi}_{34}\,\Psi_{14}]\Big\}$$

Analogne izraze dobili bismo i za y- i z-komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona. U izrazu za j pod (4) izostavljeni su svi oni produkti $\overset{*}{\Psi}_{kl}\,\Psi_{mn}$, gdje su dva ili više od dva indeksa (između k, l, m, n) manji od 3, a razlog je tomu ovaj: Ako sve valne funkcije Ψ_{kl}, koje imaju k, $l = 3$, 4, izrazimo pomoću *Darwinovih* valnih paketa

$$\Psi_{kl} = A_{kl}\,e^{-\frac{(x - v_x t)^2 + (y - v_y t)^2 + (z - v_z t)^2}{2\sigma_0^2}}\,e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z - Ut)}\,, \tag{6}$$

gdje su v_x, v_y i v_z komponente grupne brzine valnog paketa, p_x, p_y i p_z komponente pripadnih impulza[8], a U energija čestice, onda možemo iz devete, desete, trinaeste i četrnaeste jednadžbe (3a), pa nadalje iz treće, četvrte, sedme i osme jednadžbe (b) odrediti one valne funkcije Ψ_{kl}, kod kojih je jedan indeks između k i l veći od 2, a drugi manji od 3. Tako dobivamo primjenom već iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona poznatog postupka[9] u *Newtonovoj* približnosti i za momenat $t = 0$

$$\Psi_{13} = \frac{g}{2\mu_0 c}\left(A_{33}p_x - iA_{43}p_y + A_{43}p_z + \hbar\frac{iA_{33}x + A_{43}y + iA_{43}z}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{23} = \frac{\overset{*}{g}}{2\mu_0 c}\left(A_{43}p_x - iA_{33}p_y - A_{33}p_z + \hbar\frac{iA_{43}x + A_{33}y - iA_{33}z}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{14} = \frac{g}{2\mu_0 c}\left(A_{34}p_x - iA_{44}p_y + A_{44}p_z + \hbar\frac{iA_{34}x + A_{44}y + iA_{44}z}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{24} = \frac{\overset{*}{g}}{2\mu_0 c}\left(A_{44}p_x - iA_{34}p_y - A_{34}p_z + \hbar\frac{iA_{44}x + A_{34}y - iA_{34}z}{\sigma_0^2}\right)P \qquad (7)$$

$$\Psi_{31} = \frac{g}{2\mu_0 c}\left(A_{33}p_x - iA_{34}p_y + A_{34}p_z + \hbar\frac{iA_{33}x + A_{34}y + iA_{34}p}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{41} = \frac{g}{2\mu_0 c}\left(A_{43}p_x - iA_{44}p_y + A_{44}p_z + \hbar\frac{iA_{43}x + A_{44}y + iA_{44}z}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{32} = \frac{\overset{*}{g}}{2\mu_0 c}\left(A_{34}p_x - iA_{33}p_y - A_{33}p_z + \hbar\frac{iA_{34}x + A_{33}y - iA_{33}z}{\sigma_0^2}\right)P$$

$$\Psi_{42} = \frac{\overset{*}{g}}{2\mu_0 c}\left(A_{44}p_x - iA_{43}p_y - A_{43}p_z + \hbar\frac{iA_{44}x + A_{43}y - iA_{43}z}{\sigma_0^2}\right)P,$$

[8] Dakako da se time ne misli reći, da komponente impulza čestice imaju neke posve određene vrijednosti; uistinu postoje samo izvjesne vjerojatnosti za njihovu veličinu (isp.: L. de Broglie, Einf. in die Wellenmechanik, 1929, str. 145). Valja još istaknuti, da veličina σ_0 u jednadžbama (6) znači praktično proširenje valnog paketa.

Primijetiti valja još, da broj povoljnih veličina A iznosi ukupno 4 (L. de Broglie, Particules à spin, 1943, str. 164).

[9] Vidi citat pod [5] i osim toga: C. Schaefer, Phys., **III-2**, str. 469—470, 1937.

gdje nam P označuje izraz

$$e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}}\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)}.$$

Iz izraza pod (7) razabiramo, da su tim izrazima određene valne funkcije malene prema onima, koje su određene jednadžbama (6), i to zbog toga, što imaju u nazivniku $2\mu_0 c^2$, a toga one valne funkcije u (6) nemaju. Stoga prema običaju, poznatom iz *Diracove* teorije, nazivamo funkcije, navedene pod (6) velikima, a one navedene pod (7) malenim valnim funkcijama. Razabiramo jednim pogledom na (7), da sve ovdje navedene valne funkcije imaju jedan indeks manji od 3, a drugi veći od 2. Iz jednadžbi pak (3a) i (3b) lako bismo se uvjerili, da su one valne funkcije, koje imaju obadva indeksa manja od 3, još manje [zapravo neznatne prema onima pod (7)], pak ih možemo u računu zanemariti.

Primjena izraza pod (6) i (7) u jednadžbi (5) vodi nas do ove jednadžbe za x-komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona

$$j_x = \left\{(\overset{*}{A}_{33}A_{33} + \overset{*}{A}_{43}A_{43} + \overset{*}{A}_{34}A_{34} + \overset{*}{A}_{44}A_{44})\,\varepsilon v_x + \right.$$

$$+ \frac{\varepsilon\hbar}{2\mu_0}\left[(\overset{*}{A}_{33} + \overset{*}{A}_{44})(A_{34} + A_{43}) + (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{33} + A_{44})\right]\frac{y}{\sigma_0^2} -$$

$$- i\frac{\varepsilon\hbar}{2\mu_0}\left[(\overset{*}{A}_{44} - \overset{*}{A}_{33})(A_{34} + A_{43}) + \right.$$

$$\left.\left. + (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{33} - A_{44})\right]\frac{z}{\sigma_0^2}\right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}}, \qquad (8a)$$

odnosno, ako primijenimo matematičke identitete

$$\frac{y}{\sigma_0^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}}\right),$$

$$\frac{z}{\sigma_0^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}}\right)$$

poznate već iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona,

$$j_x = \Big\{ (\overset{*}{A}_{33} A_{33} + \overset{*}{A}_{43} A_{43} + \overset{*}{A}_{34} A_{34} + \overset{*}{A}_{44} A_{44}) \varepsilon v_x +$$

$$+ \frac{\varepsilon \hbar}{4\mu_0} \Big[- \Big\{ (\overset{*}{A}_{33} + \overset{*}{A}_{44})(A_{34} + A_{43}) - (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{33} + A_{44}) \Big\} \frac{\partial}{\partial y} -$$

$$- i \Big\{ (\overset{*}{A}_{33} - \overset{*}{A}_{44})(A_{34} + A_{43}) +$$

$$+ (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{44} - A_{33}) \Big\} \frac{\partial}{\partial z} \Big] \Big\} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma_0^2}} . \qquad (8b)$$

Analognim postupkom dobili bismo i y- i z-komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona. Iz triju komponenata statističke gustoće električne struje možemo u analogiji s onim, što nam je poznato iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona[10], napisati statističke srednje vrijednosti za pojedine komponente magnetskog momenta mezona; one su nakon normalizacije, provedene prema *de Brogliejevoj* jednadžbi za statističku gustoću čestice

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\varepsilon \hbar}{4\mu_0 c} \cdot \frac{2(\overset{*}{A}_{44} A_{44} - \overset{*}{A}_{33} A_{33})}{\overset{*}{A}_{33} A_{33} + \overset{*}{A}_{43} A_{43} + \overset{*}{A}_{34} A_{34} + \overset{*}{A}_{44} A_{44}}$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{\varepsilon \hbar}{4\mu_0 c} \cdot i \frac{(\overset{*}{A}_{33} - \overset{*}{A}_{44})(A_{34} + A_{43}) + (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{44} - A_{33})}{\overset{*}{A}_{33} A_{33} + \overset{*}{A}_{43} A_{43} + \overset{*}{A}_{34} A_{34} + \overset{*}{A}_{44} A_{44}}$$

$$\mathfrak{M}_z = - \frac{\varepsilon \hbar}{4\mu_0 c} \cdot \frac{(\overset{*}{A}_{33} + \overset{*}{A}_{44})(A_{34} + A_{43}) + (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{33} + A_{44})}{\overset{*}{A}_{33} A_{33} + \overset{*}{A}_{43} A_{43} + \overset{*}{A}_{34} A_{34} + \overset{*}{A}_{44} A_{44}} ,$$

gdje nam $\overset{*}{A}_{kl}$ označuje konjugirano-kompleksnu vrijednost od A_{kl}. Sam pak magnetski moment valnog paketa (koji nam daje neku sliku mezona), dobivamo odavde kvadriranjem i zbrajanjem komponenata (i vađenjem drugoga korijena iz dobivena kvadrata). Kod toga valja uvažiti, da je

$$i^2 (A_{34} + A_{43})^2 (\overset{*}{A}_{33} - \overset{*}{A}_{44})^2 + (A_{34} + A_{43})^2 (\overset{*}{A}_{33} + \overset{*}{A}_{44})^2 =$$

$$= 4 \overset{*}{A}_{33} \overset{*}{A}_{44} (A_{34} + A_{43})^2$$

[10] L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1937, str. 173—177. — C. Schaefer, Theor. Phys. **III-2**, 1937, str. 471—473.

$$i^2 (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})^2 (A_{44} - A_{33})^2 + (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})^2 (A_{33} + A_{44})^2 =$$

$$= 4 A_{33} A_{44} (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})^2 \qquad (10)$$

$$2 (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{34} + A_{43}) i^2 (\overset{*}{A}_{33} - \overset{*}{A}_{44})(A_{44} - A_{33}) +$$

$$+ 2 (\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{34} + A_{43})(\overset{*}{A}_{33} + \overset{*}{A}_{44})(A_{33} + A_{44}) =$$

$$= 4 (\overset{*}{A}_{33} A_{33} + \overset{*}{A}_{44} A_{44})(\overset{*}{A}_{34} + \overset{*}{A}_{43})(A_{34} + A_{43})$$

Osim toga je prema *de Brogliejevoj* definiciji složenih valnih funkcija za čestice sa spinom 1 svakako

$$A_{33} A_{44} = A_{34} A_{43} \qquad (11)$$

(to vrijedi i za konjugirano-kompleksne vrijednosti), pak zbog toga lako zaključujemo

$$4 (\overset{*}{A}_{44} A_{44} - \overset{*}{A}_{33} A_{33})^2 + 4 \overset{*}{A}_{33} \overset{*}{A}_{44} (A_{34} + A_{43})^2 =$$

$$= 4 (\overset{*}{A}{}^2_{33} A^2_{33} + \overset{*}{A}{}^2_{34} A^2_{34} + \overset{*}{A}{}^2_{43} A^2_{43} + \overset{*}{A}{}^2_{44} A^2_{44}) . \qquad (12)$$

Uvedemo li pomoćnu hipotezu

$$A_{34} = A_{43} \qquad (13)$$

(to vrijedi i za konjugirano-kompleksne vrijednosti), koja bi mogla imati svoje opravdanje u tome, što po *de Broglieju* obadvjema česticama, koje bi fuzijom imale tvoriti mezon, pripada jednaka masa u stanju mirovanja $\left(\frac{\mu_0}{2}\right)$ onda nam izrazi na desnoj strani posljednjih dviju jednadžbi (10) daju upravo one dvostruke produkte, koji izraz na desnoj strani jednadžbe (12) nadopunjuju na potpuni kvadrat. Tako konačno izlazi iz jednadžbi (9) opisanim postupkom

$$|\mathfrak{M}| = \frac{\varepsilon \hbar}{2\mu_0 c} , \qquad (14)$$

što je apsolutni iznos magnetskog momenta mezona.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 24. II. 1950.)

Dr. ĐURO KUREPA

PROBLEM MJERE I MONOTONA PRESLIKAVANJA DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA[1]

1. **Problem mjere prema Borelu** sastoji se u tome da odredimo porodicu skupova $P(B)$ koja će obuhvatati sve intervale brojevnog pravca, a k tome imati ova dva svojstva:

1. (σ-svojstvo). Ako članovi niza S_n leže u porodici $P(B)$, onda i njihova unija (suma) leži u $P(B)$, t. j. iz $S_n \in P(B)$ slijedi $\bigcup_n S_n \in P(B)$, $(n \in N)$[2];

2. (δ-svojstvo). Ako članovi S_n niza leže u $P(B)$, onda u $P(B)$ leži i zajednički dio $\bigcap_n S_n$ tih skupova, t. j.

$$\text{iz } S_n \in P(B) \text{ slijedi } \bigcap_n S_n \in P(B),\ (n \in N).$$

Postoji postupak (isporedi na pr. Kuratovski [8], p. 159) kako se postepeno može izgraditi porodica $P(B)$[3]; skupovi koji sačinjavaju množinu $P(B)$ zovu se *izmjerivi skupovi u Borelovu smislu.*

Naravno, slično se postavlja problem za skupove u ravnini, prostoru i t. d.

2. **Problem mjere prema Lebesgue-u** (v. [11] p. 110; [12] p. 74) sastoji se, za linearne skupove, u tome da svakom linearnom skupu E pridijelimo realan broj $\geqslant 0$ tako zvanu *mjeru, mE, skupa E* i da pritom budu ispunjena ova tri uslova:

---

[1] Članak je na francuskom bio napisan koncem 1937. godine, no do danas nije bio objelodanjen.

[2] Znak $\in$ čitaj »jest element od« i sl.; N je skup svih prirodnih brojeva; znak $(n \in N)$ čitaj »za svaki $n \in N$« odnosno »kad n prolazi skupom N«.

[3] Isp. Đ. Kurepa, Matematički kontinuum, Glasnik mat. fiz. I, 112—125, 1946., čl. 4—6.

L_1 *Kongruentni skupovi imaju istu mjeru;*

L_2 *Mjera je potpuno (kompletno) aditivna funkcija:* udruženju (sumi) od najviše prebrojivo mnogo skupova, koji dva po dva nemaju zajedničkih točaka, pripada mjera, koja je jednaka sumi mjera tih skupova.

L_3 *Mjera jediničnog odreska* $[0, 1]$ *svih brojeva* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *jest* 1[4].

U vezi s uslovom L_2 možemo promatrati i uslov

L_2^* *Mjera unije dvaju skupova bez zajedničke točke jest suma mjera tih dvaju skupova.*

Vitali je 1905. dokazao, da ima i neizmjerivih skupova u Lebesgue-ovu smislu. Specijalno, nazovemo li *razredom realnih brojeva* svaki najveći linearni skup sa svojstvom, da je razlika ma kojih njegovih dvaju članova racionalan broj, tada se čitavi kontinuum raspada u porodicu disjunktnih razreda; ako linearan skup V[5] sadrži iz svakog razreda jedan jedini član, onda on nije izmjeriv u Lebesgue-ovu smislu.[5]

No problem, da li postoji mjera s uslovima L_1, L_2^* (a ne L_2) i L_3 ostao je i dalje otvoren.

---

[4] Naravno, ako se radi o skupovima u ravnini odn. prostoru, ulogu skupa $[0, 1]$ preuzet će jedinični kvadrat odn. jedinična kocka.

[5] Ako za racionalni broj r označimo sa $V + r$ skup svih brojeva $x + r$, $(x \in V)$, onda se vidi, da su za različite r ti skupovi dva po dva bez zajedničkih točaka i da je čitavi kontinuum $C = \bigcup_r (V + r)$, $(r \in R)$. Tu je R skup svih racionalnih brojeva. Kad bi skup V imao određenu mjeru, recimo mV, bilo bi po uslovu L_1:

$$m\,V = m\,(V + r),$$

jer skup $V + r$ nastaje iz V translacijom; kako je nadalje skup R racionalnih brojeva prebrojiv, bilo bi po uslovu L_2:

$$m\Big(\bigcup_{r \in R} (V + r)\Big) = \sum_{r \in R} m\,(V + r),$$

dakle

$$(*) \qquad m\,C = \sum_{r \in R} m\,(V + r).$$

Odmah ćemo doći na kontradikciju. Naime, bilo bi ili $m\,V = 0$ ili $m\,V > 0$; u prvom slučaju bilo bi $m\,(V + r) = 0$ za svaki $r \in R$, pa dakle, prema (*) i $m\,C = 0$, protivno uslovu L_3, da je $m\,[0,1] = 1$. Ako je pak $m\,V > 0$, onda gornja relacija (*) daje $m\,C = \infty$, što znači, da sam kontinuum C ne bi bio izmjeriv, jer njegova mjera ne bi bio određen broj.

Dakle mV ne postoji.

Hausdorff (v. [7] pp. 469—472) je dokazao, da za skupove na kugli ili skupove u prostoru sa 3 i više dimenzija, taj ublaženi problem mjere ne dopušta pozitivan odgovor. Njemu je naime pošlo za rukom da kuglinu plohu rastvori na 4 disjunktna dijela od kojih je jedan prebrojiv[6], dok preostala tri A, B, C imaju osebujno svojstvo, da su međusobno kongruentni, pa bi dakle morali imati za mjeru trećinu mjere mK čitave kugline plohe; međutim skup A je kongruentan ne samo sa B i C nego i s njihovim spojem $B \cup C$ tako da bi dakle bilo

$$mA = mB + mC,$$

t. j. trećina kugle bila bi jednaka dvije trećine kugle, a to je nemoguće, ako je mjera same kugle $\neq 0$.

Banach [1] je naprotiv pokazao, da postoji realna funkcija za linearne (ravninske) skupove, koja udovoljava L_1, L_2, L_3. Time je dakle dokazana egzistencija mjere (uz uslove L_1, L_2, L_3) u linearnom kontinuumu C_1 i u ravnini C_2.

Na taj način otkrivena je velika razlika u strukturi Kartezijevih prostora C_1 (pravac), C_2 (ravnina) s jedne strane i prostora C_n sa $n > 2$ dimenzija s druge strane. Ta je razlika bila upadljiva naročito kad su Banach i Tarski (v. [3]) dokazali, da ma koja dva skupa koja leže u Kartezijevu prostoru s n dimenzija $(n > 2)$ i koji obuhvataju po jednu kuglu, možemo rastaviti na konačno mnogo dijelova, tako da svaki dio jednog skupa bude podudaran s odgovarajućim dijelom drugoga skupa[7]; naprotiv, takvo rastavljanje nije moguće u slučaju $n = 1$ i $n = 2$.[8]

---

[6] A time i mjere 0; vidi se naime, da svaki skup, koji je najviše prebrojiv, ima mjeru 0.

[7] Sierpinski je dokazao ovo: svaka kugla može se rastaviti u 8 disjunktnih dijelova, tako da nakon zgodnih kretanja pet od njih odn. tri od njih ispune po jednu kuglu, koja ima radius isti kao i zadana kugla [v. Fundamenta mathematicae, 33 (1945) p. 229].

[8] Neumann (v. [12]) je tu pojavu ispitivao s gledišta teorije grupa i našao da razlog toga naglog skoka sa slučaja $n = 1$, 2 na preostale slučajeve $n = 3, 4, \ldots$ leži u građi grupe kretanja prostora C_n; naime prostori C_n sa $n > 2$ dopuštaju slobodnu grupu kretanja (rotacija oko jedne te iste točke) s dvije izvodnice, dok za prostore C_1 i C_2 takve grupe ne postoje.

Čitava pojava zavisi od grupa transformacija. Jer, da se u prostoru C_n $(n > 2)$ uzela samo grupa translacija, ne bi bilo paradoksalnog razlikovanja; s druge strane, promatra li se mjesto grupe kretanja grupa svih afinih transformacija u ravnini, ima ta grupa dvije slobodne izvodnice, pa zato u ravnini ne postoji mjera koja bi mjesto uslova L_1 zadovoljavala zahtjevu da bude invarijantna s obzirom na afine transformacije.

3. **Banachov problem mjere** sastoji se u ovome: Ako je Q zadan skup, može li se svakom skupu $S \subset Q$ pridružiti realan broj

$$mS \geqslant 0,$$

tako da budu ispunjena ova tri uslova:

B_1 Ako je $x \in Q$, onda je $m(x) = 0$ t. j. svaki jednočlani skup u Q ima mjeru 0 (taj uslov čini ublaženje Lebesgue-ova uslova L_1);

B_2 Funkcija m je potpuno aditivna (isp. uslov L_2);

B_3 Funkcija m nije identički jednaka 0 (isp. uslov L_3).

Tako postavljen problem mjere je problem koji se tiče ne individualno skupa Q, nego svih skupova koji imaju isti kardinalni broj kao i skup Q. Jer, ako je f ma kakvo obostrano jednoznačno preslikavanje skupa Q, pa ako označimo sa fQ skup svih $f(x)$, $(x \in Q)$, tada postojanje mjerne funkcije m u Q dopušta obrazovanje mjerne funkcije m_1 u fQ, na pr. tako da za svaki skup $S \subset fQ$ stavimo

$$m_1 S = m\,(f^{-1}S).$$

No za skupove Q, koji su konačni ili prebrojivi, Banachov problem mjere je lako rješiv, jer prema uslovima B_1 i B_2 takva mjera identički bi iščezavala, što se protivi sa B_3.

St. Banach i C. Kuratowski [2] dokazali su, da je Banachova mjera nemoguća i za slučaj kad skup Q ima $\aleph_1$ za svoj kardinalan broj.

4. **Ulamov uslov.** St. Ulam je dokazao [14], da je Banachova mjera nemoguća, ako osnovni skup Q zadovoljava ovom Ulamovom uslovu:

Neka je Φ ma kakova porodica iz Q sa svojstvom, da je svaki sistem skupova iz Φ, koji su dva po dva bez zajedničkih točaka, najviše prebrojiv; tada postoji porodica Ψ sa svojstvom[9]:

$$\Psi \subset P(Q) \setminus \Phi, \tag{4.1}$$

$$k\Psi \leqslant \aleph_0, \tag{4.2}$$

$$k(Q \setminus \bigcup_S S) \leqslant \aleph_0, \quad (S \in \Psi). \tag{4.3}$$

[9] $P(Q)$ označuje skup svih dijelova skupa Q.
Za dva skupa A i B, oznaka $A \setminus B$ predstavlja skup svih elemenata iz A koji nisu u B. kX označuje kardinalni broj (potenciju) skupa X; prema tome, $kX \leqslant \aleph_0$ znači, da je X najviše prebrojiv.

Ulamov uvjet je vanredno općenit. Zasad se ne zna ni za jedan skup, koji ga ne bi ispunjavao; tako se na pr. zna, da svaki skup kojemu je kardinalan broj manji od prvog nedostiživog kardinalnog broja, zadovoljava Ulamov uvjet (v. Sierpinski, [13], p. 107)[10].

5. **Carathéodory-ev problem mjere.** Često se spominje Carathéodory-ev problem mjere metričkog prostora E, a sastoji se (v. [6] p. 238) u tome, da svakom skupu $S \subset E$ pridijelimo t. zv. »vanjsku« mjeru $\mu^* S$, tako da budu zadovoljena ova 4 uslova:

C_1 $0 \leqslant \mu^* S \leqslant \infty$; za prazni skup v mjera je 0; ima bar jedan $S \subset E$ sa svojstvom $\mu^* S > 0$;

C_2 Ako je $X \subset S \subset E$, onda je $\mu^* X \leqslant \mu^* S$;

C_3 Mjera spoja od konačno ili prebrojivo mnogo skupova jest manja ili jednaka sumi mjera tih skupova: ako je $n < \omega_0$ ili $n = \omega_0$, tada je

$$\mu^* \bigcup_\nu S_\nu \leqslant \sum_\nu \mu^* S_\nu\,, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

C_4 Ako su A, B dva skupa sa razmakom $\neq 0$[11], onda je

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B.$$

Lako se dokaže, da u Kartezijevom prostoru C_n ima Carathéodory-evih vanjskih mjera (v. [6], p. 239.).

6. **Problem mjere kao poseban slučaj monotonih preslikavanja djelimično uređenih skupova.** Označimo li sa

$$(P(Q); \subset) \tag{6.1}$$

množinu svih skupova sadržanih u Q i djelimično uređenih s obzirom na odnos $\subset$, onda bi postojanje Banachove i Carathéodory-eve mjere za osnovni skup Q značilo uzlazno preslikavanje djelimično uređena skupa (6.1) na skup C realnih brojeva (odnosno na skup $C \cup \{\infty\}$).

[10] $\aleph_\alpha$ je nedostiživ (inakcesibilan), ako redni broj α nema neposrednog prethodnika, a broj $\aleph_\alpha$ nije suma od manje od $\aleph_\alpha$ brojeva koji su $< \aleph_\alpha$.

[11] Razmak dvaju skupova A i B jest infimum razmaka točaka a, b gdje je $a \in A$, $b \in B$. Prema tome, razmak skupova A i B jest $\neq 0$ onda i samo onda, ako postoji broj $\varepsilon > 0$, tako da bude razmak $|a - b| \geqslant \varepsilon$ za svaki $a \in A$, $b \in B$.

Općenito, neka je

(6.2) μ

ma kakvo jednoznačno preslikavanje djelimično uređena skupa (6.1) na izvjestan djelimično uređen skup

(6.3) $(S;\leqslant)$;

ovaj se sastoji od skupa S, koji je djelimično uređen s obzirom na relaciju $\leqslant$ [12]. Transformacija μ je *uzlazna* u (6.1) (isp. K u r e p a [10]) ako relacije

(6.4) $X, Y \in P(Q), X \subseteq Y$

povlače

(6.5) $\mu X \leqslant \mu Y.$

Konvencija o praznom skupu i praznom elementu. Prazni (vakantni ili pusti) skup v jest onaj skup, koji nema nijednog elementa; to isto možemo izreći riječima, da je v sastavljen od *pustog elementa;* smatrat ćemo da je v dio svakog skupa; također ćemo pusti element smatrati elementom svakog skupa i to naravno *nepravim elementom* svakog skupa. Kad se govori o preslikavanju f skupa S, pa ako se izričito ne kaže drukčije, onda se podrazumijeva, da pritom pusti element skupa S prelazi opet u pust element, t. j. da je

$$fv = v.$$

Skupovi mjere nula. Definicija mjere. Za svaki $x \in Q$ reći ćemo, da je mjere nula s obzirom na uzlazno preslikavanje μ; isto tako, za svaki skup $M \subset Q$ za koji postoji točka $x \in Q$ sa svojstvom

$$\mu M = \mu(x),$$

reći ćemo da je mjere nula; prema tome relacija

(6.6) $\mu M \in \bigcup_x \mu(x), \ (x \in Q)$

je nuždan i dovoljan uslov, da dio $M \subset Q$ bude mjere nula. Ako skup M nije mjere nula, reći ćemo, da je on *mjere* $\neq 0$ t. j. mjere različite od nula.

---

[12] To znači, da je

1. $x \leqslant x$ za svaki $x \in S$;
2. iz $x, y, z \in S$ te $x \leqslant y \leqslant z$ slijedi $x \leqslant z$;
3. ako su x, y takvi elementi u S, da je i $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$, onda je $x = y$.

Po definiciji, mjera u osnovnom skupu Q bit će svako jednoznačno uzlazno preslikavanje μ djelimično uređena skupa $(P(Q), \subseteq)$, ako su ispunjena ova tri uslova:

K_1 svaki dio skupa mjere nula jest mjere nula;

K_2 unija od $\leqslant \aleph_0$ skupova mjere nula jest mjere nula;

K_3 ako su F_1, F_2 dvije porodice disjunktnih skupova mjere $\neq 0$ sa svojstvom, da je

(6.7) $F_1 \subset F_2$ i da

(6.8) $F_2 \setminus F_1$ ima $\geqslant \aleph_0$ članova, tada je

(6.9) $\mu \bigcup_{x_1 \in F_1} x_1 < \mu \bigcup_{x_2 \in F_2} x_2$ [13]

L e m a. U svakom skupu postoji bar jedna mjera.

Stvarno, neka je q ma kakav predmet, koji ne leži u Q; promatrajmo skup

(6.10) $\{q\} \cup P(Q),$

koji ćemo djelimično urediti tako, da q stavimo između prazna skupa i preostalog dijela djelimično uređena skupa $(P(Q); \subseteq)$; za svaki element x skupa (6.10) stavimo:

$$\mu(x) = q \text{ ili } x$$

već prema tome, da li je $k\,x \leqslant \aleph_0$ ili $k\,x > \aleph_0$; tada se vidi da je μ određena mjera u skupu Q.

Za djelimično uređen skup $(S, \leqslant)$ stavlja se:

(6.11) $k_c(S;\leqslant) = \sup_{X \subseteq S} X$, (sup = supremum = gornja ograda),

pri čemu X prolazi svima dobro uređenim dijelovima skupa $(S;\leqslant)$; primijetimo, da je kX oznaka za kardinalni broj od X.

Teorem. *Neka je Q proizvoljan skup s Ulamovim svojstvom; neka je nadalje μ ma koja mjera u skupu Q t. j. ma koje uzlazno preslikavanje parcijalno uređena skupa $(P(Q); \subset)$ uz uslove K_1, K_2 i K_3. Tada se slijedeća dva uslova međusobno isključuju:*

O) U Q ima bar jedan skup mjere $\neq 0$ [14]

---

[13] Unija (spoj) $\bigcup_{x_1 \in F_1} x_1$ je skup sastavljen od elemenata, koji se javljaju kao element u bar jednom skupu iz $X_1 \in F_1$ porodice F_1. Primijetimo, da $x < y$ znači, da je $x \leqslant y$, ali da nije $y \leqslant x$. Znak $<$ u (6.9) je bitan.

[14] Na pr. točka $\mu(Q)$ razlikuje se od svih točaka $\mu(x)$, $(x \in Q)$,

A) (Arhimedov postulat):

(6.12) $k_c(\mu(P(Q)); \leqslant)) \leqslant \aleph_0$; pritom je

$(\mu(P(Q)); \leqslant)$ parcijalno uređeni skup svih $\mu(x)$, $(X \in P(Q))$.

Primjedba. Dobro je sadržaj gornjeg teorema dovesti u vezu s ovom Borelovom izrekom (v. [4] p. 108 u noti): »... *Etant donnée une suite indéfiniment croissante de nombres entiers, il n'existe pas de nombre réel supérieur à tous les nombres de cette suite.* Cet »*axiome d'Archimède*« est au fond la base même de la mesure des grandeurs ...«.

Dokaz teorema (isp. Sierpinski [13] p. 108).

Neka Q i μ imaju isto značenje kao i u teoremu; pretpostavimo da teorem nije istinit, dakle da postoji bar jedan

(6.13) $M \in P(Q)$

mjere različite od nule, ma da Arhimedov uslov A vrijedi.

Promatrajmo porodicu

(6.14) Φ

svih $X \in P(Q)$ za koje presjek

(6.15) $X \cap M$

ima mjere $\neq 0$. Kako je

$$X \cap M \subseteq X,$$

to će zbog uslova K_1 svi elementi od Φ biti mjere $\neq 0$.

Dokažimo, da je svaki dio od Φ koji je sastavljen od disjunktnih skupova najviše prebrojiv.

Stvarno, kad bi u Φ bilo neprebrojivo mnogo elemenata

(6.16) $X_0, X_1, \ldots, X_\alpha, \ldots, (\alpha < \omega_1)$

svojstva

(6.17) $X_\alpha \cap X_\beta = v$ (prazno), $(\alpha < \beta < \omega_1)$,

tada stavljajući za svaki $\alpha < \omega_1$:

(6.18) $F_\alpha = \bigcup_\xi X_\alpha$, $(\xi \leqslant \omega\alpha)$,

skup F_α bio bi mjere $\neq 0$.

Nadalje, ako je $\alpha < \beta < \omega_1$, skup F_β sadržavao bi kao svoje dijelove sve

X_ξ, $(\omega\alpha \leqslant \xi < \omega\beta)$ koji inače ne leže u F_α.

To znači, da bi bilo $F_\alpha \subset F_\beta$, i da bi u $F_\beta \setminus F_\alpha$ bilo neizmjerno mnogo skupova disjunktnih i mjere $\neq 0$, pa bi bilo ne samo $\mu F_\alpha \leqslant \mu F_\beta$, nego po uslovu K_3 također

(6.19) $\mu F_\alpha < \mu F_\beta$.

Na taj bi način imali nebrojiv dobro uređen dio

(6.20) μF_α, $(\alpha < \omega_1)$

djelimično uređena skupa $\mu(P(Q))$, protivno pretpostavci da vrijedi Arhimedov uslov A.

Tim je teorem potpuno dokazan.

BIBLIOGRAFIJA

1. St. Banach, Sur le problème de la mesure (Fund. Math. Warszawa, IV, 1923, pp. 7—33).
2. St. Banach — C. Kuratowski, Sur une définition du problème de mesure (Fund. Math., 14, 1929, 127—131).
3. St. Banach — A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes (Fundamenta Mathematicae, Warszawa, 6, 1924, pp. 244—277).
4. E. Borel, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes, Paris, 1919, 14 + 166.
5. E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1928, note VI.
6. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 1918, 10+704.
7. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, 6+476.
8. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig, 1927, 285.
9. C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa-Lwów, 1933, 10+285.
10. Đ. Kurepa, Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés (Comptes rendus, Paris, 1937, 205, 1033—1035; također Revista de Ciencias, Lima, año 42, 1940, pp. 827—849; año 43, 1941, pp. 483—500).
11. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, 1928, 16 + 342.
12. J. v. Neumann, Zur allgemeinen Theorie des Masses (Fundamenta Mathematicae, 13, 1929, pp. 73—116.
13. W. Sierpinski, Hypothèse du continu, Warszawa-Lwów, 1934, 6+192.
14. St. Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre (Fund. Math. 16, 1930, 140—150).

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 1. IV. 1950.)

Dr. ĐURO KUREPA

DOKAZ PRINCIPA TOTALNE INDUKCIJE*

Definirajući prirodne brojeve kao konačne nepuste skupove, odnosno kao kardinalne brojeve konačnih nepraznih skupova, dokazat ćemo, da za prirodne brojeve vrijedi osnovni princip, t. zv. princip totalne indukcije.

1. **Pojmovi i oznake.** Ako je S skup, tada se sa

(1.1) $$x \in S \text{ ili } S \ni x$$

označuje, da je x element (broj, atom, točka) skupa S; relacija $x \in S$ se čita: x je element od S.

Ako su A i B dva skupa, pa ako iz $x \in A$ slijedi $x \in B$, onda se veli, da je A *dio* skupa B i piše

(1.2) $$A \subseteq B \text{ odn. } B \supseteq A.$$

Ako je $A \subseteq B$ i $B \subset A$, onda su skupovi A i B *identični*, pa se piše

(1.3) $$A \equiv B \text{ ili } A = B.$$

Ako je $A \subseteq B$, ali nije $B \subseteq A$, onda se to označuje sa

(1.4) $$A \subset B \text{ odn. } B \supset A$$

i kaže, da je A *pravi dio skupa* B.

Ako su A i B dva skupa, tada se pod *unijom (udruženjem)* skupova A i B razumijeva skup

(1.5) $$A \cup B$$

* Primjedba. Članak je izvadak iz jednog drugog, što sam ga bio napisao petog mjeseca 1949. i iz kojeg su nekoji dijelovi ušli u moju knjigu »Teorija skupova«.

Potpunosti radi, navodim bez dokaza nekoliko teorema s uputom, s kojim je teoremom u knjizi dotični teorem povezan, da se u njoj lakše nađe sam dokaz tog teorema.

sastavljen od onih elemenata, koji leže u bar jednom od zadanih skupova A i B. Pod *diferencijom skupova* A i B razumijevamo skup

(1.6) $$A \setminus B$$

sastavljen od svih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B. Ako je

(1.7) $$P$$

izvjesna porodica skupova, onda se pod *presjekom* skupova iz P razumijeva skup

(1.8) $$\bigcap_{S \in P} S \text{ ili } \bigcap_{S} S, \ (S \in P)$$

sastavljen od *svih* onih elemenata koji leže u *svima* članovima porodice P.

Skup je A ekvivalentan skupu B, simbolički

(1.9) $$kA \equiv kB,$$

ako postoji postupak f, kojim svakom $x \in A$ možemo pridružiti jedan jedini element, $f(x)$, skupa B i to tako, da različitim elementima iz A odgovaraju različiti elementi u B i da svaki element iz B bude pritom pridružen jednom jedinom elementu iz A. Ako je $X \subseteq A$, onda će nam $f(X)$ označavati skup svih elemenata $f(x)$, kad x prolazi skupom X.

Ako je skup A ekvivalentan dijelu skupa B, naznačivat ćemo to sa

(1.10) $$kA \leqslant kB \text{ odn. } kB \geqslant kA.$$

Ako je i $kA \leqslant kB$ i $kB \leqslant kA$, onda se piše

(1.11) $$kA = kB;$$

Ako je $kA \leqslant kB$, ali nije $kA \geqslant kB$, onda se to naznačuje sa

(1.12) $$kA < kB \text{ odn. } kB > kA.$$

Pod kardinalnim (glavnim) brojem razumijevamo svaki skup (isp. [1]); da naznačimo, da neki skup S shvatamo kardinalnim brojem, naznačujemo to sa

(1.13) $$kS;$$

pri tome naravno ekvivalentne skupove identificiramo, pa $kA \equiv kB$ izražava činjenicu da je skup A ekvivalentan sa skupom B; nadalje, ako su A i B dva skupa bez zajedničkih

točaka, onda se skup $A \cup B$, shvaćen kao kardinalan broj, zove *suma kardinalnih brojeva* A i B, što se naznačuje sa

$$k(A \cup B) = kA + kB.$$

Općenito, pod sumom ma kojih dvaju kardinalnih brojeva A i B[1] razumijevamo bilo koji skup, što ga dobijemo obrazovanjem unije $A_1 \cup B_1$ dvaju skupova A_1, B_1 bez zajedničkih točaka, a od kojih je A_1 ekvivalentan sa A, dok je B_1 ekvivalentan sa B. Suma kardinalnih brojeva A i B označuje se sa

$$kA + kB. \tag{1.14}$$

Odmah se vidi, da unija $A_1 \cup B_1$, shvaćena kao kardinalan broj, ne zavisi od posebnog izbora skupova A_1 i B_1, jer ako je $kA_2 \equiv kA$, $kB_2 \equiv kB$, a A_2, B_2 bez zajedničkih točaka, bit će

$$k(A_1 \cup B_1) \equiv k(A_2 \cup B_2),$$

jer je A_1 ekvivalentno (preko A) sa A_2, a B_1 (preko B) sa B_2.

Prazni (vakantni) skup v, t. j. skup bez ijednog elementa shvaćen kao broj zove se *nula* i označuje sa 0 t. j.

$$kv = 0. \tag{1.15}$$

Specijalno, svaki predmet p obrazuje određen *jednočlan skup*, koji se označuje sa

$$\{p\} \text{ ili } (p), \tag{1.16}$$

a shvaćen kao kardinalan broj, označuje se sa 1 i piše

$$k\{p\} = 1. \tag{1.17}$$

Ako iz $x \in S$ slijedi, da je $S \setminus \{p\}$ jednočlan, stavlja se

$$ks = 2, \tag{1.18}$$

pa se zove *dvočlanim skupom*.

Analogno, ako iz $x \in S$ slijedi

$$k(S \setminus \{x\}) = 2,$$

veli se, da je skup S *tročlan*, a shvaćen kao broj, zove se »tri« i piše

$$kS = 3 \text{ i t. d.} \tag{1.19}$$

[1] Prema tome A i B su skupovi.

2. **Konačni i beskonačni skupovi.** Postavlja se pitanje: ako je S zadan skup, da li on može biti ekvivalentan sa bar jednim svojim pravim dijelom t. j. da li sistem

$$X \subset S, \quad kX \equiv kS \tag{2.1}$$

ima ili nema rješenja u X?

Ako taj sistem ima bar jedno rješenje X, veli se, da je skup S *beskonačan (transfinitan);* u obrnutom slučaju, S je *konačan (finitan)*. Specijalno, prazan skup smatramo konačnim.

Drugim riječima, vrijedi ova:

Dedekindova osnovna definicija. Ako za svako obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa S na sama sebe vrijedi $fS = S$, skup S je konačan; ako pak postoji bar jedno obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa S tako da bude

$$fS \subset S,$$

veli se, da je skup S *beskonačan* ili *transfinitan*.

Konačni skupovi $\neq v$ shvaćeni kao kardinalni brojevi zovu se *prirodnim brojevima*.

Teorem 2.1. a) *Ako je skup S konačan, konačan je i svaki podskup $S_0 \subseteq S$.*

b) *Ako je skup S beskonačan, beskonačan je i svaki nadskup $S_1 \supseteq S$.* (cf. Kurepa, Teorija skupova, teoremi 5.1.1 i 5.1.2.)

Teorem 2.2 a) Ako je skup S konačan, konačan je i skup

$$S \cup \{x\}$$

gdje je $\{x\}$ ma koji jednočlan skup; ako S ne sadrži $\{x\}$, onda je

$$kS < k(S \cup \{x\}).$$

b) Ako je skup S beskonačan, beskonačan je i skup

$$S \setminus \{x\} \text{ i uvijek je}$$

$$kS = k(S \setminus \{x\});$$

pritom je $\{x\}$ ma koji jednočlan skup (cf. teorem 5.1.3 i teorem 5.1.4 u Kurepa, Teorija skupova).

Teorem 2.3. Ako je kardinalni broj $m > 0$, onda postoji jedan jedini kardinalni broj, a označuje se sa $m - 1$, tako da bude kardinalni broj

$m = (m - 1) + 1$ (cf. teorem 5.2.1.1 u Kurepa, Teorija skupova).

Teorem 2.4. Za ma koje kardinalne brojeve m, n, ako je $m < n$, tad je $m + 1 \leqslant n$ (cf. teorem 5.2.3.2 u Kurepa, Teorija skupova).

3. **Prirodni brojevi** jesu kardinalni brojevi konačnih nepustih skupova. Skup svih prirodnih brojeva označujemo slovom

$$N. \tag{3.1}$$

Drugim riječima, N je skup svih konačnih nepraznih skupova, pri čemu poistovjećujemo ekvivalentne skupove i među njima ne pravimo nikakve razlike; tako na pr. $1 \in N$, $2 \in N$, $5 \in N$; naprotiv, nije $\{5\} \in N \setminus \{1\}$, ma da $\{5\} \in N$, jer jednočlani skup $\{5\}$ predočuje broj 1; uopće iz $x \in N$ i $y \in N \setminus x$ proizlazi $x \neq y$.

Teorem 3.1. *Ako je n prirodan broj, onda*

a) *postoji i broj $n + 1$;*

b) *$n + 1$ je prirodan broj* i

c) *uvijek je* $n < n + 1$ (cf. Kurepa, Teorija skupova, teorem 5.3.1).

4. **Princip totalne indukcije.** Princip totalne indukcije daje pregled o skupu N svih prirodnih brojeva, a sastoji se u ispravnosti ovog zaključka:

Pretpostavka. Neka je S ma kakav skup prirodnih brojeva koji udovoljava ovim dvjema uslovima:

Uslov I. Prirodni broj 1 leži u S:

$$1 \in S; \tag{4.1}$$

Uslov II. Ako neki prirodni broj n leži u S, tada u S leži i prirodni broj $n + 1$ t. j.

$$\text{ako je } n \in S, \text{ onda je } n + 1 \in S; \tag{4.2}$$

Zaključak: Svaki prirodni broj leži u skupu S t. j.

$$S = N, \tag{4.3}$$

gdje je N skup svih prirodnih brojeva.

Naravno, princip totalne indukcije možemo i ovako formulirati: ako precrtamo broj 1 i ako, nadalje, precrtavši neki prirodni broj n, precrtamo i broj $n + 1$, onda ćemo precrtati svaki prirodni broj.

Da se vidi, da ova formulacija izlazi iz prethodne, dovoljno je promatrati skup S svih precrtanih prirodnih brojeva; da,

obrnuto, iz posljednje formulacije proizlazi prethodna, dovoljno je »precrtati« svaki član skupa S o kojemu se govori u principu.

Dokaz principa totalne indukcije prilično je dug.

§ 4.1. Označimo sa

$$\Phi \tag{4.1.1}$$

porodicu svih skupova $S \subseteq N$ za koje vrijede gornji uslovi I i II; označimo sa

$$N_0 \tag{4.1.2}$$

presjek svih tih skupova, dakle

$$N_0 = \bigcap_S, \ (S \in \Phi). \tag{4.1.3}$$

Dokazat ćemo nekoliko svojstava skupa N_0 iz kojih će proizaći jednakost

$$N_0 = N \tag{4.1.4}$$

pa dakle i

$$N = S \tag{4.1.5}$$

za svaki $S \in \Phi$, što i tvrdi princip totalne indukcije.

Dokažimo, da i skup N_0 ispunjava I i II, da je dakle

$$N_0 \in \Phi. \tag{4.1.6}$$

Najprije, iz $S \in \Phi$ slijedi $1 \in S$, što znači da broj 1 leži u svima članovima porodice Φ, a to baš znači da je

$$1 \in N_0 \tag{4.1.7}$$

t. j. da N_0 zadovoljava uslov I.

Dokažimo, da N_0 zadovoljava i uslov II t. j. da iz

$$n \in N_0 \text{ slijedi } n + 1 \in N_0.$$

No, $n \in N_0$ znači da je

$$n \in X \text{ za svaki } X \in \Phi.$$

A to pak, po definiciji porodice Φ, znači da je i

$$n + 1 \in X$$

za svaki $X \in \Phi$, što se drukčije izražava i ovako:

$$n + 1 \in N_0.$$

§ 4.2. Za skup $N_0 \subseteq N$ vrijedi ovaj »princip totalne indukcije«: Ako je

(4.2.1) $S_1 \subset N_0$, pa ako je

(4.2.2) $1 \in S_1$; ako nadalje

(4.2.3) iz $n \in S_1$ slijedi $n+1 \in S_1$,

onda je

(4.2.4) $S_1 = N_0$.

Stvarno, skup S_1 zadovoljava uslove I, II, pa je dakle

$$S_1 \in \Phi,$$

što po definiciji (4.1.3) znači, da je $N_0 \subset S_1$, a to s gornjom pretpostavkom (4.2.1) daje traženu jednakost $S_1 = N_0$.

§ 4.3. Skup N_0 je beskonačan t. j. skup N_0 može se preslikati na svoj vlastiti pravi dio.

Stvarno, stavimo

$$f(n) = n+1, (n \in N_0),$$

tada je ta funkcija obostrano jednoznačna, jer se napokon radi o prirodnim brojevima, i naravno da je $f(n) \neq 1$; no prema (4.1.7):

$$1 \in N_0,$$

tako dakle da je $f(N_0) \subseteq N_0 \setminus \{1\} \subset N_0$, što znači da je N_0 beskonačan.

§ 4.4. Za svaki $n \in N_0$ sadrži skup N_0 točno n brojeva koji su $\leqslant n$.

Označimo sa

(4.4.1) S_1

skup svih brojeva iz N_0 za koje je ta tvrdnja ispravna. Naravno, $1 \in S_1$, jer je broj 1 jedini prirodni broj $\leqslant 1$; također je $2 \in S_1$, jer su 1 i 2 očito jedini prirodni brojevi $\leqslant 2$. Uzmimo, da je tvrdnja dokazana za neki $n \in N_0$; dokažimo da je onda ona ispravna i za $n+1$. No, brojevi iz N_0 koji su $\leqslant n+1$ jesu (v. teorem 2.4): broj $n+1$ i svi brojevi iz N_0 koji su $\leqslant n$; ovih, po pretpostavci ima n, pa oni sa brojem $n+1$ koji je od njih sviju različit, sačinjavaju svega $n+1$ brojeva u N_0 koji su $\leqslant n+1$.

Ukratko, imamo ovo: $1 \in S_1$; iz $n \in S_1$ slijedi $n+1 \in S_1$, što, prema (4.2) i relaciji (4.2.4), znači, da skup S_1 sadrži čitav N_0, što smo i htjeli dokazati.

§ 4.5. Dokažimo napokon da je $N_0 = N$.

U obrnutom slučaju, postojao bi bar jedan prirodan broj

(4.5.1) m,

koji ne leži u N_0.

Odmah ćemo vidjeti, da to nije moguće, jer bismo inače mogli preslikati čitavi *beskonačni* skup N_0 na skup M, kojemu je m kardinalan broj, dakle na *konačni* skup

M.

a) Najprije, $m > 1$, jer po uslovu (I) vrijedi: $1 \in N_0$, dok po pretpostavci (4.5.1) broj m ne leži u N_0, jer kad bi $m-1$ bio u N_0, bio bi u N_0, po uslovu II, i broj $(m-1)+1 = m$. Stavimo

$$m_1 = m;$$

pretpostavimo, da je

$$n \in N_0,\ n > 1$$

i da smo za sve prirodne brojevi ν iz N_0 koji su $\leqslant n$ definirali brojeve

(4.5.2) $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sa svojstvom

(4.5.3) $$\begin{cases} m_1 = m \\ m_\nu = m_{\nu-1} - 1 \text{ za svaki } \nu \in N_0,\ 1 < \nu \leqslant n, \end{cases}$$

i da brojevi (4.5.2) ne leže u N_0, pa je zato

(4.5.4) $m_\nu > 1$ za svaki $\nu \leqslant n$, a napose za $\nu = n$.

Skup se (4.5.2) tada može proširiti nadopisujući još i prirodni broj $m_{n+1} = m_n - 1$; naime, kako je prema (4.5.4), $m_n > 1$, broj $m_n - 1$ postoji, a radi uslova II ne leži niti on u N_0.

Na taj način, relacije (4.5.3), (4.5.4) vrijede za indeks $n = 1$, vrijede za indeks $n+1$ čim vrijede za $n \in N_0$, pa one prema § 4.2 vrijede za svaki $n \in N_0$.

Bilo bi dakle:

(4.5.5) $$\begin{cases} m_1 = m, \\ m_{n+1} = m_n - 1 > 0 \text{ za svaki } n \in N_0. \end{cases}$$

b) Sada ćemo odmah doći na najavljenu kontradikciju obrazovanjem preslikavanja

(4.5.6) $$f(n),\ (n \in N_0)$$

beskonačnog skupa N_0 na konačni skup M, za koji je

(4.5.7) $$kM = m = m_1 .$$

Da počnemo, neka je $f(1)$ ma koji element u M. Stavimo:

$$M_1 = M,\ M_2 = M_1 \setminus \{f(1)\}.$$

Kako je $f(1) \in M_1$, bit će $kM_2 = kM_1 - 1 = m_1 - 1 = m_2$.

Uzmimo, da je n ma koji broj iz N_0 i pretpostavimo, da smo definirali točke

$$f(1), \ldots, f(n) \text{ iz } M_1 \text{ i skupove}$$

$$M_1, M_2, M_3, \ldots, M_n \text{ i da je}$$

(4.5.8) $$f(\nu) \in M_\nu, M_{\nu+1} = M_\nu \setminus \{f(\nu)\}, kM_{\nu+1} \equiv m_{\nu+1}$$

za svih n brojeva $\leqslant n$ iz N_0.

Proširimo relaciju (6.5.8) i za slučaj $\nu = n + 1$.

Napose za $\nu = n$ daje (4.5.8)

$$kM_{n+1} \equiv m_{n+1},$$

što prema (4.5.5) znači da množina M_{n+1} nije prazna, nego sadrži bar jedan element; označimo joj jedan element sa $f(n+1)$ i stavimo

$$M_{n+2} = M_{n+1} \setminus \{f(x_{n+1})\}.$$

Bit će

$$kM_{n+2} = kM_{n+1} - k\{f(x_{n+1})\} = m_{n+1} - 1 = m_{n+2},$$

a time (4.5.8) vrijedi i za $\nu = n + 1$. Prema svojstvu skupa N_0 iz § 4.2 dokazane su time relacije (4.5.8) za svaki prirodni broj iz N_0.

Drugim riječima, dobili smo jednoznačno preslikavanje f:

$$f(n),\ (n \in N_0).$$

c) Da se vidi, da je to apsurd, treba još uočiti da je transformacija (4.5.8) i recipročno jednoznačna t. j. da među točkama $f(n)$, $(n \in N_0)$ nema jednakih. No, prema (4.5.8) imamo:

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \ldots\ldots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \ldots,\ (n \in N_0).$$

Dakle su množine

(4.5.9) $$M_1 \setminus M_2, \ldots, M_n \setminus M_{n+1}, M_{n+1} \setminus M_{n+2}, \ldots.$$

bez zajedničkih točaka. Ali, prema (4.5.8) imamo

$$M_n \setminus M_{n+1} = \{f(n)\},$$

pa nejednakost jednočlanih skupova (4.5.9) znači, da niti među točkama $f(a)$ $(n \in N_0)$ nema jednakih.

Ukratko, kad bi postojao prirodan broj m koji nije sadržan u skupu N_0 svih prirodnih brojeva za koje vrijedi princip totalne indukcije, konačni skup M kardinalnog broja m sadržao bi beskonačni dio

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots\},\ (n \in N_0),$$

kao obostrano jednoznačnu sliku beskonačnog skupa N_0. Kako je to, prema teoremu (2.1a) nemoguće, princip totalne indukcije je potpuno dokazan.

§ 4.6. Niz prirodnih brojeva. Standardni oblik *skupa* svih prirodnih brojeva glasi

(4.6.1) $$1,\ 2,\ 3,\ \ldots.,\ n,\ n+1,\ \ldots$$

To je t. zv. *niz prirodnih brojeva.*

Početni član je 1; opći član je n, a član poslije njega jest baš broj $n + 1$ koji se javlja u uslovu II kod totalne indukcije.

Dokazana jednakost $N = N_0$ i svojstvo iz § 4.4. daju:

K o r o l a r 4.6.1. *Ako je n koji god prirodni broj, onda ima točno n prirodnih brojeva koji su* $\leqslant n$ dakle

(4.6.2) $$k\{1, 2, \ldots, n-1, n\} = n,\ (n \in N).$$

§ 5. O p ć a p r i m j e d b a. U prethodnim izlaganjima nismo se eksplicite vezali za kakav određen sustav aksioma. Članak je pisan tako, da se može uklopiti na pr. u F r a e n k e l - Z e r m e l o v sustav BAPUVEF [4] ili u D e d e k i n d o v a izlaganja u klasičnom spisu [2].

U spomenutom F r a e n k e l - Z e r m e l o v o m sustavu nema glasovitog (Z e r m e l o v a) aksioma o izboru. Inače, kad bi se taj aksiom prihvatio, dokaz principa potpune indukcije je vanredno jednostavan: pomoću aksioma izbora lako se dokazuje (H a r t o g s), da je skup N d o b r o u r e đ e n. Ako je tada S ma kakav podskup skupa N sa svojstvima I i II iz § 4, mora biti $S = N$; u protivnom naime slučaju, skup $N \setminus S$ imao bi bar jednu točku, a kao dio dobro uređena skupa N, imao bi

$N \setminus S$ i početni element, recimo p; naravno $p > 1$, pa bi broj $p - 1$, kao manji od p, ležao ne u $N \setminus S$ nego u S; no, zbog uslova II, iz $p - 1 \in S$ slijedi također $(p - 1) + 1 \in S$ t. j. $p \in S$, što je u proturječju sa $p \in N \setminus S$.

Inače, primijetimo da smo se u § 4.5b služili mogućnošću da u pojedinom nepraznom skupu koji se konkretno pojavljuje uočimo po jednu njegovu točku.

BIBLIOGRAFIJA

1. Birkhoff, Garrett: Generalized arithmetic, Duke math. Journ., 9, (1942), 283—302.

2. Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? (Prvo izdanje 1888; v. također Gesammelte math. Werke, III, 1932, pp. 335—391).

3. Kurepa, Đ.: Démonstration du principe de l'induction totale [C. r. Paris. 230, 703—705 (1950)].

4. Kurepa, Đ.: Teorija skupova, Zagreb, 22+444, 1950.

5. Neumann, J. v.: Definition durch transfinite Induktion. Math. Ann., 99 (1928), pp. 373—391.

6. Zermelo, E.: Ueber Grenzzahlen und Mengenbereiche, Fundamenta Mathematicae, 16 (1930), 29—47.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 1. IV. 1950.)

Dr. F. I. HAVLIČEK

O GRAFIČKOM RJEŠAVANJU AKUSTIČKIH PROJEKATA

Kod projektiranja velikih dvorana obično se služimo sekundarnim zvukom za jačanje intenziteta na udaljenim mjestima. Pored pazvuka bacaju refleksije na plohama valove zvuka po mogućnosti prema zadnjim redovima sjedišta dvorane. Ali iskustvo je pokazalo, da za glazbene priredbe ne smije razlika u duljini puteva direktnog i indirektnog vala biti veća od 12—15 m, odnosno od 1/20 sek, ako želimo, da se ispravno čuju i brze kompozicije.

Projektiramo li veliku dvoranu, t. j. dvoranu za maksimalno dopuštene razlike u duljini puta zvučnih valova, moramo stalno kontrolirati, da li smo ostali s plohama refleksije u granicama dopuštenih razlika.

Naša grafička metoda pojednostavnjuje znatno ove kontrole i omogućuje direktno funkcionalna rješenja.

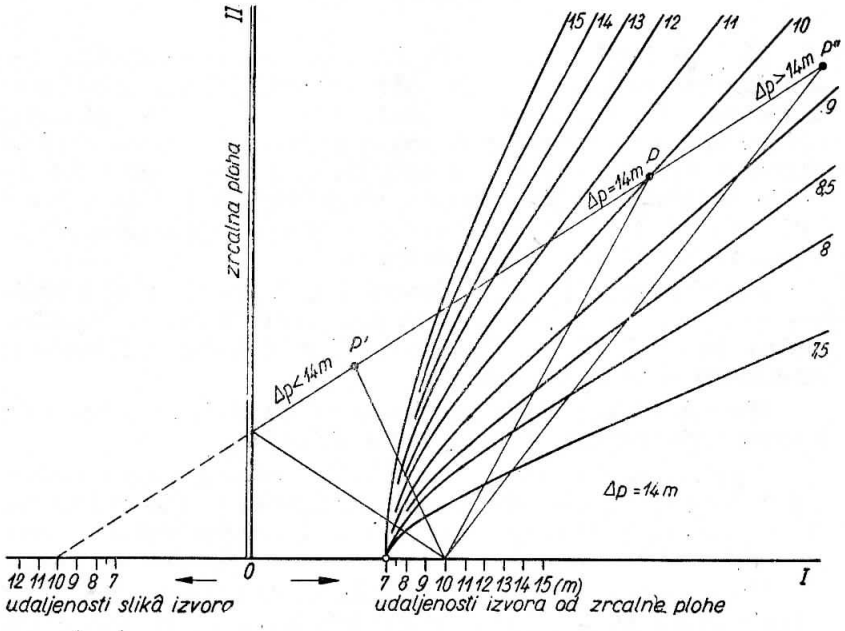
Na sl. 1. predstavlja pravac II plohu refleksije, a na pravcu I označena su mjesta izvora zvuka u raznim udaljenostima na desnoj strani; na lijevoj strani nalaze se zrcalna mjesta izvora zvuka.

Tražimo li na primjer, da razlika između putova direktnog i indirektnog (t. j. reflektiranog) vala bude 14 m, dobivamo geometrijsko mjesto svih točaka ravnine ovog svojstva s pomoću pramena hiperbola. Na ovakvoj hiperboli označeno je odgovarajuće mjesto izvora. Uzme li se, recimo, izvor zvuka udaljen 10 m od plohe refleksije, razlika u putu zvučnih valova za točku P na hiperboli s oznakom 10 m izlazi baš 14 m. Za točku P' je razlika manja, a za točku P'' veća nego 14 m. Područje lijevo od pojedinih hiperbola je dakle dopušteno s obzirom na iskorišćavanje refleksija, a područje desno je zabranjeno područje.

Na sl. 2. zamišljenoj na prozirnom papiru, naznačena je simetrala S koncertne dvorane, i mjesto na kojem se nalazi

solist. Oko solistova mjesta nacrtana je kružnica K sa polumjerom 30 m, koja označuje udaljenost zadnjih redova (30 m predstavlja već blizinu dopuštene granice bez električkog pojačavanja).

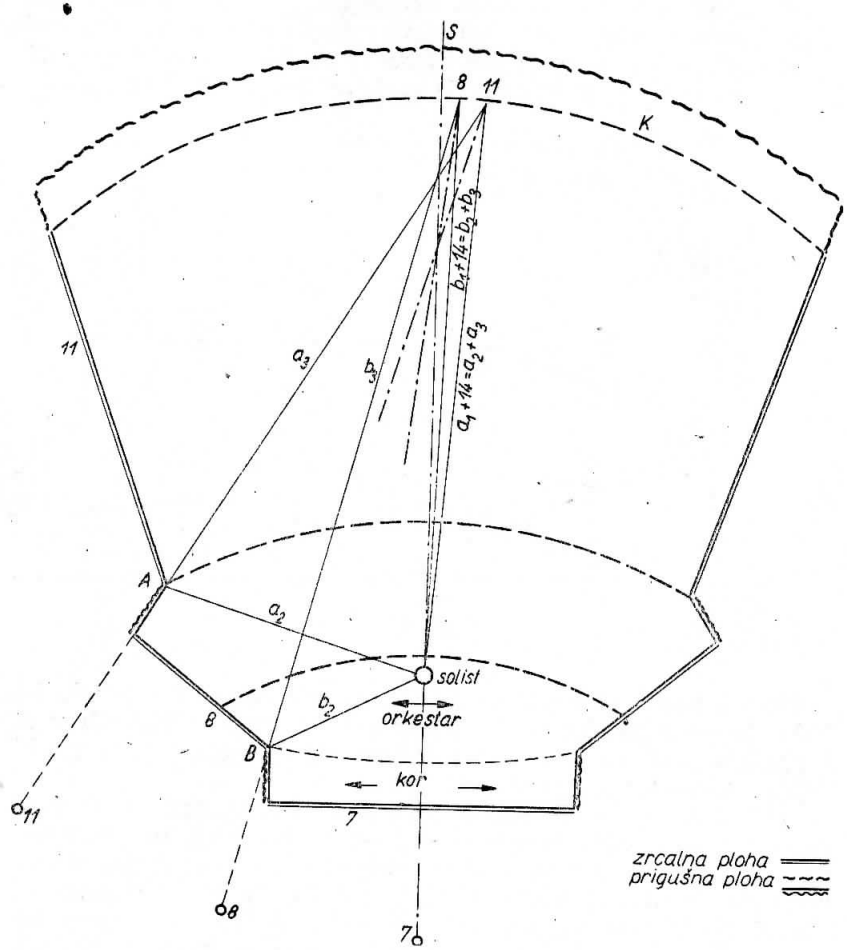
Položimo li sliku 2. na dijagram slike 1., tako da solistovo mjesto dođe na razna mjesta izvora zvuka na pravcu I, i okrećemo li papir oko solistova mjesta, pokazivat će dio ravnine između pravca II i odgovarajuće hiperbole dopušteno područje. Pravac II predstavlja stijenu refleksije. Vidimo, da za uda-



Sl. 1.

ljenost od 11 m može služiti prilično duga ravnina za refleksiju sve do točke A. Ako bismo produžili ravninu dalje prema podiju, padale bi refleksije već desno od granične hiperbole II. Priključit ćemo stoga još jednu ravninu udaljenu 8 m od izvora zvuka; nju možemo produžiti do točke B, koja predstavlja u okviru projekta prirodnu granicu podija prema mjestu, koje je predviđeno za kor. Stražnja granica je ravnina udaljena 7 m od solistova mjesta. Za ovu ravninu nema zabranjenih područja. Na slici su još naznačene zrcalne točke izvora za

ravnine refleksije 11, 8 i 7. Da ne bi bilo previše linija na slici, izostavljeni su primjeri reflektiranih zraka. Sl. 2. pokazuje kako ta grafička metoda vodi k funkcionalnom rješenju, koje daje arhitektu dobre mogućnosti za njegove dispozicije.

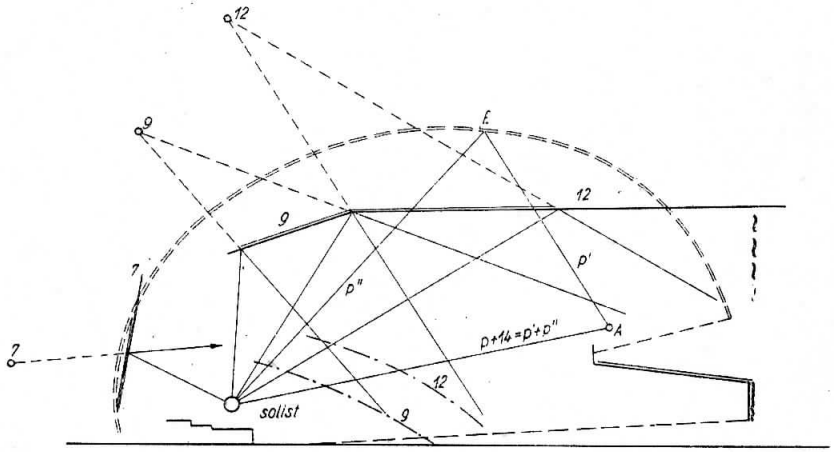


Sl. 2.

Na sl. 3. vidimo kako nam služi dijagram sl. 1. za određivanje oblika stropa koncertne dvorane s ispravnom refleksijom. Postupak je isti kao kod tlocrta. Solistovo mjesto

stavimo na udaljenosti 7, 9 i 12 m i gledamo, da li sjedište leži u dopuštenom području.

Katkada nas zanima, gdje se uopće može smjestiti ploha refleksije, koja ne će davati veće razlike u putu od dopuštene. To pitanje pojavljuje se obično kod adaptacija već sagrađenih dvorana. Na sl. 3. zanima nas na primjer ovo područje za mjesto A na balkonu s obzirom na solistovo mjesto. Ako je p udaljenost mjesta od solista u metrima, tražimo da je $p' + p'' = p + 14$ i taj nam uvjet daje elipsu E sa žarištima u A i na mjestu



Sl. 3.

solistovu. Sama elipsa E ne dolazi u obzir kao ploha refleksije, kako je poznato, jer bi se svi valovi na njoj reflektirali u A i tamo uzrokovali nesnošljivi intenzitet, a ostala mjesta ne bi dobila sekundarnog zvuka od stropa.

U slučaju, da se radi o cijelom orkestru, čini se na prvi mah, da bi trebalo raspraviti o svim mjestima na naprijed navedeni način. Ali normalna dispozicija orkestra smještava pojedine izvore zvuka, t. j. instrumente, među glazbenike, i valovi pojedinih instrumenata se više ne šire tako pravilno kao na primjer u slučaju prve violine, već zbog ogiba stvaraju kompliciran sustav, gdje orkestar djeluje kao cjelina. Ovaj poželjni efekt često jačamo time, da iznad samog orkestra smjestimo jednu plohu refleksije. Glazbenike u prvom redu orkestra možemo smjestiti nešto malo u krugu, tako da ne dobijemo refleksije u zabranjenom području.

Svojstva naših električkih pojačala ne dopuštaju besprijekornu reprodukciju. Želimo li dakle projektirati velike dvorane za umjetničke priredbe, moramo iskoristiti mogućnosti sekundarnog zvuka. Kako pazvuk smijemo povećavati samo vrlo oprezno, preostaju nam samo refleksije, koje treba iskoristiti do krajnje mjere. Nomografske metode za rješavanje akustičkih problema poput gornje nisu autoru poznate iz literature.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 20. XII. 1949.)

SADRŽAJ

Dr. Ing. DANILO BLANUŠA
Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija 5

Dr. STANKO BILINSKI
Homogene mreže zatvorenih orijentabilnih ploha 129

Dr. Ing. E. HERMAN i Ing. J. STIPETIĆ
O procesu izlučivanja aluminijskog hidrata na osnovi Bayerova postupka 165

Dr. V. S. VRKLJAN
De Brogliejeva teorija čestica sa spinom 1 i Ehrenfestov teorem 211

Dr. V. S. VRKLJAN
O magnetskom momentu mezona sa spinom 1 221

Dr. ĐURO KUREPA
Problem mjere i monotona preslikavanja djelimično uređenih skupova 229

Dr. ĐURO KUREPA
Dokaz principa totalne indukcije 238

Dr. F. I. HAVLIČEK
O grafičkom rješavanju akustičkih projekata 249